Capitolo 6

Statica dei continui unidimensionali

6.1 Richiami teorici

I fili sono un caso particolare di corpo continuo *unidimensionale*, in cui cioè una dimensione è prevalente rispetto alle altre. Appare giustificato descrivere, almeno in prima approssimazione corpi di questo tipo come delle *curve* nello spazio euclideo $\mathcal{E}$ su cui vengono fatte ipotesi opportune che servono a descrivere la risposta del mezzo continuo a sollecitazioni esterne. Queste *ipotesi costitutive* servono a distinguere tra loro vari corpi che, geometricamente, possono essere tutti visti come delle curve. Per poter trattare dunque i fili e le verghe euleriane, su cui questo capitolo si concentra occorre svolgere dei richiami sulla geometria delle curve.

6.1.1 Geometria delle curve

Una curva $\mathcal{C}$ nello spazio euclideo è un'applicazione *continua* che associa ad ogni punto t di un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ un punto $P(t) \in \mathcal{E}$. Fissato un punto O come origine di $\mathcal{E}$, la curva $\mathcal{C}$ pu'øessere descritta come

$$P(t) - O = x(t)\boldsymbol{e}_x + y(t)\boldsymbol{e}_y + z(t)\boldsymbol{e}_z,$$

dove $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$ è una base ortonormale dello spazio delle traslazioni associato ad $\mathcal{E}$. In quel che segue supporremo sempre che la funzione $t \mapsto P(t)$ sia almeno di classe C^3. Indicando con un apice $*$ la derivazione rispetto al parametro t, si definisce *versore tangente* a $\mathcal{C}$ in un punto P il versore

$$\boldsymbol{t} := \frac{P'(t)}{|P'(t)|}.$$

Il *versore binormale* $\boldsymbol{b}$ associato alla stessa curva el punto P è invece definito come

$$\boldsymbol{b} := \frac{P''(t)}{|P''(t)|}.$$

Il versore *normale principale* alla curva in $P(t)$ è infine definito come

$$\boldsymbol{n} := \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{t}$$

cosicché la terna $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$, quando è definita, è una terna ortonormale positivamente orientata, detta terna o *triedro intrinseco* associato a $\mathcal{C}$. In generale, al cambiare del punto P appartenente all'immagine di $\mathcal{C}$ varia anche il triedro intrinseco. Per studiare la geometria di una curva è utile introdurre un particolare parametro, l'ascissa d'arco s che misura la lunghezza di un arco di curva a partire da un punto di riferimento P_0 che appartiene alla sua immagine. È possibile mostrare che, quando s viene preso come parametro, il versore tangente è

$$\boldsymbol{t} = \frac{\mathrm{d}P(s)}{\mathrm{d}s}$$

mentre il vettore normale principale si ottiene dalla formula di prima forumla di *Frénet-Serret*:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}{\mathrm{d}s} = \kappa \boldsymbol{n}, \tag{6.1}$$

dove $\kappa > 0$ è una funzione scalare del punto, detta *curvatura* della curva $\mathcal{C}$ in P. La derivata prima della binormale è retta dalla terza equazione di Frénet-Serret, data da

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s} = \tau \boldsymbol{n}, \tag{6.2}$$

dove lo scalare τ è detto *torsione* di $\mathcal{C}$ nel punto P.Infine, la variazione della normale principale in termini dell'ascissa curvilinea è retta dalla seconda formula di Frénet-Serret, data da

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}s} = -\kappa \boldsymbol{t} - \tau \boldsymbol{n}. \tag{6.3}$$

Non sempre è immediato parametrizzare una curva per mezzo della sua ascissa curvilinea. Occorre allora conosecere come calcolare la curvatura e la torsione di una curva quando quest'ultima sia parametrizzata in termini di un generico parametro t. Si dimostra che la curvatura è data da

$$\kappa = \frac{|P' \wedge P''|}{|P'|^3} \tag{6.4}$$

mentre la torsione è data da

$$\tau = -\frac{P' \wedge p'' \cdot P'''}{|P' \wedge P''|}. \tag{6.5}$$

La curvatura di una curva indica il suo allontanamento da una linea retta, dal momento che le linee rette sono le uniche curve ad avere curvatura identicamente nulla. La torsione invece indica l'allontanamento di una curva dall'essere contenuta in un piano, dal momento che si mostra come una curva è piana se e solo se la torsione è nulla in tutti i suoi punti. Osserviamo infine come il versore normale principale sia definito in un punto solo se la tangente ha derivata non nulla in quel punto rispetto all'ascissa curvilinea s. Dunque, per una retta, non è definita la normale principale o, diversamente, ogni versore ortogonale a $\boldsymbol{t}$ può giocare il ruolo di $\boldsymbol{n}$. Secondo la definizione data in questi richiami la curvatura è sempre positiva ma occorre fare attenzione perché non si tratta di una convenzione seguita da tutti i testi. Similmente, la torsione τ è definita anche come

$$\tau = -\boldsymbol{n} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s}$$

introducendo una differenza di segno rispetto alla (6.2) che definisce τ come $\tau = \boldsymbol{n} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}s}$. In ogni punto P di una curva $\mathcal{C}$ sono definiti tre piani, mutuamente ortogonali. Il piano *osculatore*, che è descritto da $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}\}$, il piano *normale*, descritto da $\{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$ ed il piano *rettificante*, descritto da $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{b}\}$. Nel piano osculatore giace il *cerchio osculatore* la cui circonferenza è quella che meglio approssima il comportamento della curva $\mathcal{C}$ in un intorno di P rispetto a tutte le circonferenze passanti per P. Il raggio ϱ del cerchio osculatore in P è dato da

$$\varrho(P) = \frac{1}{\kappa(P)}$$

dove $\kappa(P)$ è la curvatura della curva $\mathcal{C}$ in P. Il centro C del cerchio osculatore si trova sulla normale principale $\boldsymbol{n}(P)$ alla curva in P, cosicché si può scrivere

$$C - P = \frac{1}{\kappa(P)}\boldsymbol{n}(P). \tag{6.6}$$

6.1.2 Equilibrio dei fili

I fili che considereremo sono continui unidimensionali inestendibili e perfettamente flessibili. Inoltre essi resistono a *trazione* ma non a *compressione*. L'inestendibilità non riguarda solo l'impossibilità di modificare la lunghezza complessiva del filo ma anche quella di modificare *localmente* la lunghezza di un arco di filo, comunque piccolo. La flessibilità perfetta significa che i fili non resistono a coppie: in altre parole, non è possibile applicare una coppia ad un filo *e* trovare una configurazione di equilibrio. Come conqeguenza di questa proprietà si ha che lo sforzo interno è diretto solo lungo la direaione $\boldsymbol{t}$ tangente al filo in ogni suo punto. Lo sforzo interno $\boldsymbol{\tau}(P)$ nel punto generico P del filo è dunque puramente assiale ed è detto *tensione* del filo. Esso ammette la rapresentazione

$$\boldsymbol{\tau}(P) = \tau(P)\boldsymbol{t}(P) \tag{6.7}$$

dove $\tau(P)$ è uno scalare che non cambia mai segno lungo il filo e si può assumere come positivo. Per evitare complicazioni ci riferiremo spesso anche a τ come alla tensione del filo, anziché come al modulo della tensione del filo. Le equazioni di equilibrio indefinite dei fili si scrivono nella forma

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{ds} + F_t = 0 \\ \kappa\tau + F_n = 0 \\ f_b = 0\,, \end{cases} \tag{6.8}$$

dove κ è la curvatura del filo di ascissa curvilinea s ed F_t ed F_n sono le componenti delle forze attive e reattive specifiche, cioè per unità di lunghezza, agenti sul filo. È utile distinguere in F_t la componente tangenziale f_t delle sole forze specifiche *attive* e la componente tangenziale ϕ_t delle forze *reattive* specifiche e riscrivere (6.8) come

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{ds} + f_t + \phi_t = 0 \\ \kappa\tau + f_n + \phi_n = 0 \\ f_b = 0\,. \end{cases} \tag{6.9}$$

Se il filo è appoggiato su un supporto, allora in generale sia ϕ_t e ϕ_n sono non nulle. Ricordiamo che queste forze, a differenza di quelle attive, *non* si possono considerare come note a priori e costituiscono un'incognita del problema. Nel caso in cui non vi è attrito, $f_t \equiv 0$ mentre in caso contrario, l'equilibrio è possibile solo se vale la seguente disuguaglianza di Coulomb e Morin

$$|\phi_t| \leq \mu|\phi_n| \tag{6.10}$$

dove μ è un coefficiente numerico, detto coefficiente di attrito statico, che caratterizza il contatto tra i due corpi. Solitamente, $\mu \in (0,1)$ ed il caso limite $\mu = 0$ caratterizza l'assenza di attrito.

Quando il contatto tra filo e supporto non offre attrito *e* le forze attive specifiche $\boldsymbol{f}$ sono deducibili da un'energia potenziale specifica $v$tale dunque che

$$\boldsymbol{f} = -\nabla v,$$

allora è possibile dedurre da (6.9) che il modulo della tensione τ soddisfa l'equazione

$$\tau = v + C \tag{6.11}$$

dove C è una costante di integrazione che deve essere determinata a partire dai dati al contorno, cioè da come è sollecitato il filo nei punti estremi. In particolare la (6.11) si applica quando la forza attiva è quella gravitazionale.

Quando un filo non è appoggiato ad alcun supporto, ma vincolato solo agli estremi, $\phi_t = \phi_n = 0$ ma ora la forma di equiibrio del filo è incognita mentre, quando il filo è appoggiato, la sua forma di ricava dal supporto. La sollecitazione più semplice da considerare è quella in cui la forza attiva per unità di lunghezza ha direzione costante. Nel caso della forza peso si ha $\boldsymbol{f} = -p\boldsymbol{e}_y$, dove p è il peso specifico del filo che si suppone *costante.* Si dimostra allora che il filo all'equilibrio si dispone in un piano contenente $\boldsymbol{e}_y$. Se $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ è una base ortonormale del piano ed O un suo punto preso come origine, i punti P del filo soddisfano l'equazione

$$y(x) = \frac{\psi}{p}\cosh\left(\frac{p}{\psi}x + \beta\right) - c \tag{6.12}$$

dove β e c sono costanti di integrazione mentre ψ è un'altra costante che rappresenta la componente costante della tensione nella direzione $\boldsymbol{e}_x$. La curva di equazione (6.12) è nota come *catenaria* e trattandosi di un arco di coseno iperbolico, se si colloca l'origine O nel vertice della catenaria, si può riscrivere (6.12) come

$$y(x) = \frac{\psi}{p}\left[\cosh\left(\frac{p}{\psi}x\right) - 1\right]. \tag{6.13}$$

Il fatto di avere un profilo espresso da una funzione iperbolica permette di calcolare facilmente la lunghezza ℓ di un arco di catenaria compreso tra due punti, rispettivamente di ascissa x_0 ed $x_1 > x_0$. Infatti,

$$\ell = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \sinh^2(\frac{p}{\psi}x)}\mathrm{d}x = \frac{\psi}{p}[\sinh\left(\frac{p}{\psi}x_1\right) - \sinh(\frac{p}{\psi}x_0 + \beta)]. \tag{6.14}$$

Infine, la curva dei ponti sospesi serve per determinare la forma secondo cui si atteggia un cavo (descritto come un filo) che sorregge un ponte omogeneo di peso specifico P cui è sospeso per il tramite di un numero molto alto di tiranti. In effetti il ponte è una piattaforma rettangolare e vi sono due sistemi di tiranti collegati a due lati opposti del ponte e ciascuno fissato ad un cavo. Per ragioni di simmetria, si considera il profilo di uno solo dei due cavi. Se $-\boldsymbol{e}_y$ è la direzione della gravità e l'equazione di equilibrio è riferita ad un'origine O, dove è fissata una base ortonormale $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$, si può mostrare che il profilo di ciascun cavo che sostiene il ponte è un arco di parabola di equazione

$$y(x) = \frac{p}{2\psi}x^2 + ax + b \tag{6.15}$$

dove ψ è una costante che rappresenta, come già per la catenaria, il valore costante della componente della tensione nella direzione $\boldsymbol{e}_x$, mentre a e b sono altre due costanti di integrazione, da determinare grazie alle condizioni al contorno prescritte dal problema di equilibrio.

6.1.3 Verghe euleriane

A differenza dei fili, le *verghe euleriane* trasmettono azioni interne più complesse ed in particolare sono in grado di trasmettere delle coppie interne. Infatti, un'ipotesi costitutiva alla base della teoria delle verghe euleriane è che la coppia trasmessa è del tipo

$$\boldsymbol{\Gamma} := A\tau\boldsymbol{t} + B\kappa\boldsymbol{b}, \tag{6.16}$$

dove $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{b}$ sono il versore tangente ed il versore binormale al profilo della verga, τ e κ la torsione e la curvatura della verga mentre A e B sono parametri positivi che caratterizzano il materiale di cui la verga è formata. La componente di Γ lungo $\boldsymbol{t}$ è detta *momento torcente* mentre quella lungo la binormale $\boldsymbol{b}$ è detta *momento flettente*. Supponiamo che sulla verga agisca un sistema di carichi *esterni* avente densità lineare di forza $\boldsymbol{f}(s)$ e densità lineare di coppia $\boldsymbol{g}(s)$, entrambi immaginati come funzioni continue del parametro d'arco s della verga sono

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}' + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Gamma}' + \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{6.17}$$

dove $\boldsymbol{\Phi}(s)$ indica lo *sforzo interno* all'asta nel punto caratterizzato dal valore s della lunghezza d'arco. Queste equazioni generali diventano lineari nel limite di piccole deflessioni che verrà illustrato negli esercizi proposti, dove verranno sempre considerate situazioni in cui le verghe restanto in un piano, così da non dover considerare gli effetti del momento torcente.

6.2 Esercizi risolti

Esercizio 6.1 *Assegnata la curva*

$$p(t) - O = t^2 \boldsymbol{e}_x + \mathrm{e}^{\sqrt{2}t} \boldsymbol{e}_y + \sin t \boldsymbol{e}_z$$

determinarne curvatura, torsione e terna intrinseca nel punto $p(0)$ corrispondente a $t = 0$. Determinare il vettore posizione rispetto all'origine del centro del cerchio osculatore alla curva in $p(0)$.

Se deriviamo ripetutamente il vettore posizione $p(t) - O$ rispetto al parametro t otteniamo

$$p'(t) = 2t\boldsymbol{e}_x + \sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}t} \boldsymbol{e}_y + \cos t \boldsymbol{e}_z,$$

$$p''(t) = 2\boldsymbol{e}_x + 2\mathrm{e}^{\sqrt{2}t} \boldsymbol{e}_y - \sin t \boldsymbol{e}_z,$$

e

$$p'''(t) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}t} \boldsymbol{e}_y - \cos t \boldsymbol{e}_z$$

che, specializzate al caso $t = 0$ forniscono

$$p'(0) = \sqrt{2}\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z, \qquad p''(0) = 2\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y \qquad p'''(0) = 2\sqrt{2}\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z$$

da cui ricaviamo $p' \wedge p''(0) = 2(-\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - \sqrt{2}\boldsymbol{e}_z)$ e quindi, grazie alle formule che esprimono la curvatura κ e la torsione τ:

$$\kappa(0) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \qquad \text{e} \qquad \tau(0) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Il versore tangente in $t = 0$ si ottiene normalizzando ad 1 il vettore $p'(0)$:

$$\boldsymbol{t}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z$$

mentre il versore binormale si ottiene normalizzando ad 1 il vettore $p' \wedge p''(0)$, ottenendo

$$\boldsymbol{b}(0) = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - \sqrt{2}\boldsymbol{e}_z).$$

Il versore normale principale si ottiene osservando che la terna intrinseca $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$ è positivamente orientata per cui, permutando ciclicamente i suoi elementi deve essere

$$\boldsymbol{n}(0) = \boldsymbol{b}(0) \wedge \boldsymbol{t}(0) = -3\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + \sqrt{2}\boldsymbol{e}_z.$$

Il centro C^* del cerchio osculatore alla curva nel punto $p(0)$ soddisfa la relazione

$$C^* - p(0) = \frac{1}{\kappa(0)}\boldsymbol{n}(0) = \frac{3}{8}(-3\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + \sqrt{2}\boldsymbol{e}_z)$$

per cui il suo vettore posizione rispetto all'origine O è

$$C^* - O = [C^* - p(0)] + p(0) - O = [C^* - p(0)] + \boldsymbol{e}_y = \frac{1}{8}(-9\boldsymbol{e}_x + 5\boldsymbol{e}_y + 3\sqrt{2}\boldsymbol{e}_z)$$

Esercizio 6.2 *Assegnata la curva*

$$p(t) - O = 2\frac{t}{t^2+1}\boldsymbol{e}_x + (t-1)^3\boldsymbol{e}_y + t(\frac{t}{2} - 1)\boldsymbol{e}_z$$

determinarne curvatura, torsione e terna intrinseca nel punto corrispondente a $t = 0$

Derivando ripetutamente il vettore posizione $p(t) - O$ rispetto al parametro t, abbiamo

$$p'(t) = 2\left(\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}\right)\boldsymbol{e}_x + 3(t-1)^2\boldsymbol{e}_y + (t-1)\boldsymbol{e}_z,$$

$$p'' = -4t\left(\frac{3-t^2}{(t^2+1)^3}\right)\boldsymbol{e}_x + 6(t-1)\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z$$

e

$$p''' = -12\frac{t^4 - 6t^2 + 3}{(t^2+1)^3}\left[1 + \frac{3(3-t^2)}{(t^2+1)}\right]\boldsymbol{e}_x + 6\boldsymbol{e}_y$$

e, posto $t = 0$, si ha

$$p'(0) = 2\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z \qquad p''(0) = -6\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z \qquad p'''(0) = -36\boldsymbol{e}_x + 6\boldsymbol{e}_y.$$

Inoltre $p'(0) \wedge p''(0) = -(3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + 12\boldsymbol{e}_z)$ e quindi, dalle formule generali per curvatura e torsione ricaviamo

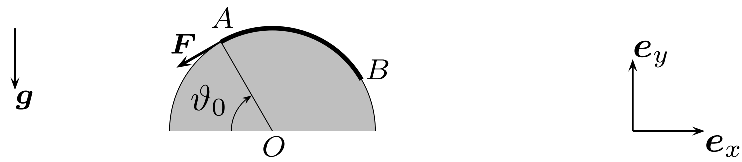
$$c = \frac{\sqrt{157}}{14\sqrt{14}} \qquad \text{e} \qquad \tau = \frac{96}{157}.$$

Il versore tangente corrispondente a $t = 0$ si ottiene normalizzando ad 1 il vettore $p'(0)$ ed è dunque

$$\boldsymbol{t}(0) = \frac{1}{14}(2\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z).$$

Il versore binormale $\boldsymbol{b}$ è dato da
$$\boldsymbol{b} = \frac{\dot{p} \wedge \ddot{p}}{|\dot{p} \wedge \ddot{p}|}$$
e dunque, per $t = 0$
$$\boldsymbol{b}(0) = -\frac{1}{\sqrt{157}}\left[3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + 12\boldsymbol{e}_z\right] :$$
per completare la terna intrinseca occorre trovare la normale principale servendosi del fatto che $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}\}$ formano una base ortonormale positivamente orientata, per cui
$$\boldsymbol{n}(0) = \boldsymbol{b}(0) \wedge \boldsymbol{t}(0) = \frac{1}{2198}[-38\boldsymbol{e}_x + 27\boldsymbol{e}_y + 5\boldsymbol{e}_z].$$

Esercizio 6.3 *In un piano verticale, un filo AB omogeneo di lunghezza $\pi R/2$ di peso specifico $4p$ è appoggiato senza attrito su un semidisco di raggio R. L'estremo B è libero, mentre in A è applicata una forza di intensità F, tangente al semidisco, che mantiene il filo in equilibrio in modo che il raggio OA formi con l'orizzontale un angolo $\frac{\pi}{3}$. Determinare, in condizioni di equilibrio, l'intensità F della forza applicata*



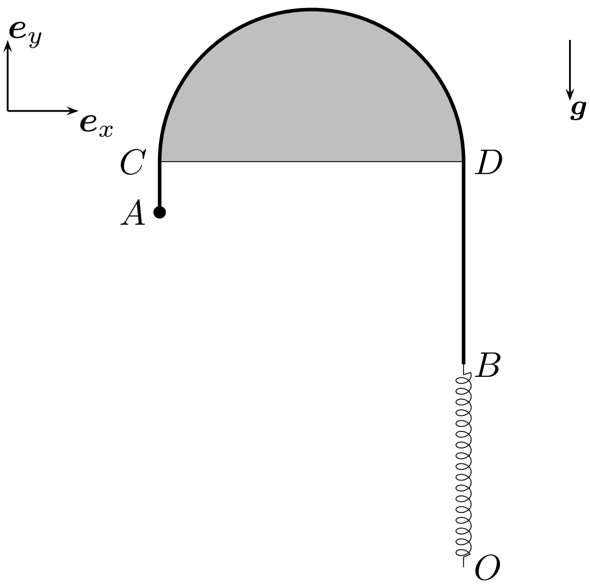
in A; il valore massimo della tensione lungo il filo; la distanza del centro di massa del filo dalla verticale passante per O;

L'intensità F della forza è uguale alla tensione in A del filo. D'altra parte, su tutti i punti del filo la tensione vale
$$\tau(\vartheta) = 4pR\sin\vartheta + c$$
dove l'angolo $\vartheta \in [\pi/3, 5\pi/6]$ è contato positivamente a partire dal raggio orizzontale alla sinistra di O. Poiché l'estremo B è libero, $\tau_B = \tau(5\pi/6) = 0$ e dunque
$$c = -2pR\,.$$
Siccome infine $\tau_A = \tau(\pi/3) = F$ concludiamo che
$$F = 2pR\left(\sqrt{3} - 1\right).$$
La tensione nel punto di quota massima, dove $\vartheta = \pi/2$, vale $2pR$. Richiediamo ora l'equilibrio dei momenti delle forze esterne agenti sul filo rispetto al punto O. Siccome

non vi è attrito, la reazione vincolare distribuita ha direzione radiale e dunque non genera momento rispetto ad O. La forza F ha braccio R e dunque il suo momento rispetto ad O vale $2pR^2\left(\sqrt{3}-1\right)$, diretto in verso antiorario. Il peso complessivo $2\pi pR$ del filo ha braccio pari alla distanza d richiesta e dunque la condizione di equilibrio impone

$$d = \frac{R}{\pi}(\sqrt{3}-1)\,.$$

Esercizio 6.4 *In un piano verticale, un filo AB omogeneo di lunghezza $2\pi R$ e densità lineare di massa $5m/2R$ ha il tratto CD a contatto senza attrito con un semidisco di raggio R. All'estremo A è posto un punto materiale di massa m, mentre B è attratto*



da una molla ideale di costante elastica mg/R verso un punto fisso O posto a distanza $4R$ da CD, sulla stessa verticale di B. In condizioni di equilibrio, determinare la lunghezza di AC, l'elongazione della molla e la tensione nel punto medio dell'arco CD.

Spezziamo il filo in tre parti: il tratto DB, il tratto AC e l'arco CD, appoggiato sulla circonferenza. Introdotto l'angolo ϑ che il generico raggio vettore forma con la direzione $\boldsymbol{e}_x$, la tensione lungo CD è

$$\tau(\vartheta) = 5mg\sin\vartheta + c \tag{6.18}$$

dove la costante c va determinata ricorrendo alle condizioni al contorno. Osserviamo che nei punti C e D, dove $\vartheta = \pi$ e 0, rispettivamente, la tensione del filo è proprio pari a c. D'atra parte, concentrandoci sul tratto AC, abbiamo che la tensione in C deve equilibrare il peso di AC e del punto materiale collocato in A. Detta x la lunghezza di AC, abbiamo allora

$$c = 5mg\frac{x}{R} + mg. \tag{6.19}$$

D'altra parte, dai dati del problema sappiamo anche che l'altro tratto rettilineo BD deve avere lunghezza $\pi R - x$ e che la tensione in D deve equilibrare il peso di DB e la forza elastica concentrata in B. Quest'ultima forza ha modulo $\frac{mg}{R}OB = \frac{mg}{R}(4R - DB) = \frac{mg}{R}[(4-\pi)R + x]$ e deve dunque valere anche la condizione

$$c = 5mg\pi - 5mg\frac{x}{R} + mg(4-\pi) + \frac{mg}{R}x :$$

uguagliando le due espressioni ottnute per c ricaviamo

$$x = \frac{R}{9}(4\pi + 3)$$

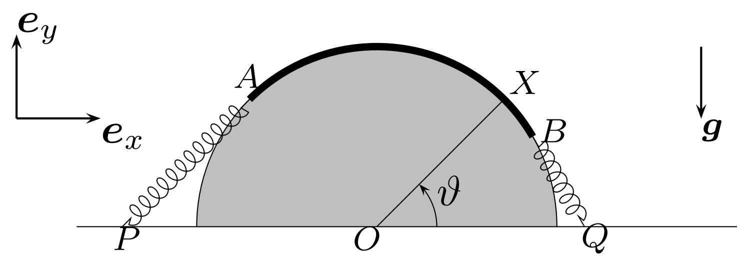
e quindi la lunghezza della molla è

$$OB = R\left(\frac{13}{3} - \frac{5\pi}{9}\right).$$

Inserendo il valore di x in (6.19) e posto $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ nella equazione (6.18), otteniamo

$$\tau(\frac{\pi}{2}) = mg\left[6 + 5\left(\frac{4}{9}\pi + \frac{1}{3}\right)\right].$$

Esercizio 6.5 *In un piano verticale, un filo AB omogeneo di lunghezza opportuna è appoggiato senza attrito su di un semidisco di raggio R e centro O, come indicato in figura. Il peso per unità di lunghezza del filo è $\sqrt{6}p/R$. Gli estremi A e B sono*



attratti verso punti P e Q dell'orizzontale per O da molle ideali di costanti elastiche $2\sqrt{3}p/R$ e $\gamma p/R$, rispettivamente. Se $OP = R\sqrt{2}$ e $OQ = 2R/\sqrt{3}$, trovare il valore di γ compatibile con l'equilibrio nella configurazione descritta in figura.

Le tensioni nei punti A e B sono pari alle forze elastiche agenti su di essi e pertanto dai dati del problema si ricava

$$\tau_A = \frac{2\sqrt{3}p}{R}R = 2\sqrt{3}p \qquad \text{e} \qquad \tau_B = \frac{\gamma p}{\sqrt{3}}.$$

Lungo il filo è poi distribuita la forza peso per cui, detto $\vartheta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}]$ l'angolo che il raggio del generico punto X del supporto forma con $\boldsymbol{e}_x$, la tensione in tutti i punti del filo vale

$$\tau(\vartheta) = \sqrt{6}p \sin\vartheta + c :$$

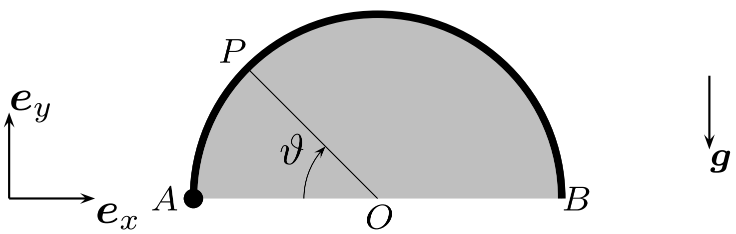
imponiamo che $\tau_A = \tau(\frac{3\pi}{4})$ per ottenere

$$c = p\sqrt{3}$$

ed ora, richiedendo che $\tau_B = \tau(\frac{\pi}{6})$ si ricava

$$\gamma = 3\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Esercizio 6.6 *In un piano verticale, un filo AB **non** omogeneo di lunghezza $\ell = \pi R$ è appoggiato senza attrito su di un semidisco di raggio R e centro O, come indicato in figura. Il peso per unità di lunghezza del filo è $p(s) = 4ps/R^2$, dove s è l'ascissa curvilinea lungo AB contata a partire da A. Trovare quanto deve valere il peso di un punto*



materiale da collocare in A affinché il filo rimanga in equilibrio nella configurazione descritta in figura.

Poiché il legame tra la lunghezza d'arco s e l'angolo $\vartheta \in [0, \pi]$ tra OA ed il generico raggio OP, orientato come in figura, è $\vartheta = s/R$, possiamo scrivere l'equazione di equilibrio indefinita lungo la tangente al filo nella forma

$$\frac{1}{R}\frac{d\tau}{d\vartheta} - \frac{4ps}{R^2}\cos\vartheta = 0$$

ovvero

$$\frac{d\tau}{d\vartheta} = 4p\vartheta \cos\vartheta$$

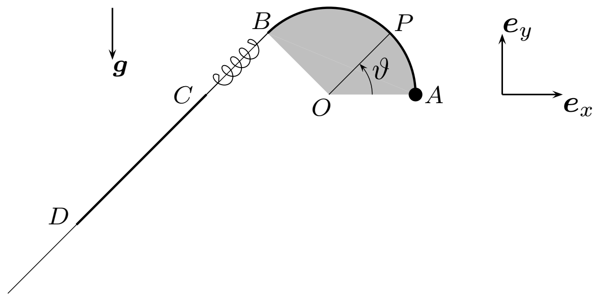
da cui ricaviamo, dopo integrazione per parti,

$$\tau(\vartheta) = 4p(\vartheta \sin\vartheta + \cos\vartheta) + c.$$

Per determinare la costante di integrazione c, osserviamo che nell'estremo libero B la tensione si deve annullare e dunque $\tau(\pi) = 0$, da cui otteniamo $c = 4p$. Poiché in $\vartheta = 0$ il valore della tensione deve coincidere con il peso del punto materiale da aggiungere in A per garantire l'equilibrio, ricaviamo

$$p_A = 8p\,.$$

Esercizio 6.7 *In un piano verticale, due fili omogenei AB e CD di ugual peso per unità di lunghezza $3p/R$ sono rispettivamente appoggiati senza attrito su un arco di cerchio di raggio R ed ampiezza $3\pi/4$ e su un piano inclinato di $\pi/4$ sull'orizzontale. Il filo AB ha lunghezza $3\pi R/4$, mentre CD ha lunghezza incognita. In A è collocato*



un punto materiale di peso $2p$ ed i due fili sono collegati in B e C con una molla ideale di costante p/R. In condizioni di equilibrio determinare: il valore della tensione nel punto più alto di AB; la lunghezza di CD e l'elongazione della molla.

La tensione in A è pari a $2p$ e dunque, introdotto l'angolo ϑ che il generico raggio OP forma con l'orizzontale, su tutto il filo si ha

$$\tau(\vartheta) = 3p\sin\vartheta + c:$$

siccome all'estremo A la tensione deve bilanciare il peso del punto materiale, abbiamo $\tau(0) = c = 2p$ per cui la tensione nel punto più alto di AB, dove $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, vale

$$\tau\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5p\,.$$

La tensione nel punto B, dove $\vartheta = \frac{3\pi}{4}$, deve bilanciare la forza elastica esercitata dalla molla che vale $p\ell/R$, se con ℓ indichiamo la lunghezza di BC. Abbiamo allora

$$\frac{p\ell}{R} = \frac{3\sqrt{2}}{2}p + 2p,$$

da cui ricaviamo

$$\ell = R\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\right).$$

La tensione del filo CD si deve annullare nell'estremo libero D mentre in C vale $p\ell/R$, come in B, per garantire l'equilibrio. Se usiamo la distanza s dall'estremo D per parametrizzare il filo CD, abbiamo

$$\tau(s) = 3p\frac{s}{R}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

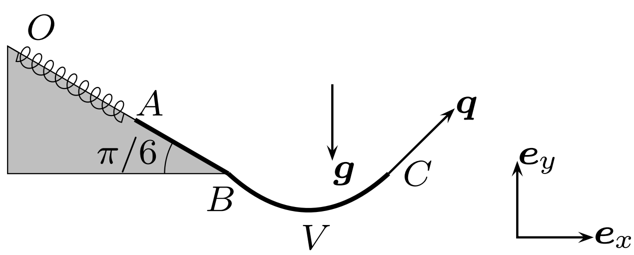
in quanto $\tau(0) = \tau_D = 0$. Se L è la lunghezza di CD, deve essere

$$\tau(L) = 3p\frac{S}{R}\frac{\sqrt{2}}{2} = p\ell/R$$

da cui segue, sostituendo il valore di ℓ ottenuto poco sopra,

$$L = R\left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}\right).$$

Esercizio 6.8 *In un piano verticale, un filo AC omogeneo di lunghezza $5\ell/4$ e peso per unità di lunghezza $3p$ ha un tratto AB di lunghezza $\ell/4$ appoggiato senza attrito ad un segmento inclinato di $\pi/6$ sull'orizzontale e l'estremo A attratto verso un punto fisso O del segmento da una molla ideale di costante elastica p.*



Il tratto BC è libero e l'estremo C è mantenuto alla stessa quota di B da una forza $\boldsymbol{f} = 3p\ell(\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_y)$. In condizioni di equilibrio, determinare il modulo della tensione del filo nel punto V di quota minima ed in B; l'elongazione della molla e la distanza tra i punti B e C.

La tensione nel punto più basso del filo, il vertice V della catenaria BC, è orizzontale e dunque deve essere uguale alla componente orizzontale di $\boldsymbol{f}$: $\tau_V = 3\frac{\sqrt{3}}{2}p\ell = \psi$. Siccome B è alla stessa quota di C, la tensione in B deve uguagliare quella in C, per la simmetria della catenaria. La tensione in C a sua volta è pari al modulo di $\boldsymbol{f}$: $\tau_B = 3p$. Se Δ indica l'elongazione della molla OA, allora $p\Delta$ deve equilibrare la tensione in B e la componente lungo il piano inclinato della forza peso risultante agente su AB. Poiché $AB = \frac{\ell}{4}$ ed il piano su cui si trova AB è inclinato di $\pi/6$ sull'orizzontale, abbimo

$$p\Delta = 3p\ell + \frac{3}{8}p\ell$$

da cui segue

$$\Delta = \frac{27}{8}\ell\,.$$

Per trovare la distanza $d = BC$ poniamo un riferimento $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ centrato in V, cosicché l'equazione della catenaria è

$$y(x) = \frac{\psi}{3p}\left[\cosh\left(\frac{3p}{\psi}x\right) - 1\right]\,.$$

Poiché

$$y'(x) = \sinh\left(\frac{3p}{\psi}x\right),$$

nel punto C dove la pendenza della retta tangente alla catenaria è $\frac{\pi}{6}$ si ha

$$y'(x_C) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

che coincide in modulo con $y'(x_B)$. Se poniamo $\eta := \frac{3p}{\psi}x_C$ allora deve essere

$$\frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

per cui $u := e^{\eta}$ risolve l'equazione di secondo grado

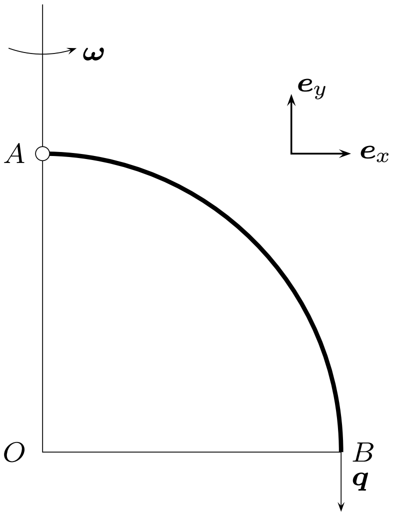
$$u^2 - \frac{2}{\sqrt{3}}u - 1 = 0$$

la cui unica radice positiva è $u = \sqrt{3}$ da cui otteniamo

$$x_C = \frac{\psi}{3p}\ln\sqrt{3}.$$

Si ha allora

$$d = x_C - x_B = 2x_C = \ell\sqrt{3}\ln\sqrt{3}\,.$$



Esercizio 6.9 *Un filo inestendibile di densità lineare di massa $2m/R$ e lunghezza $\pi R/2$ è appoggiato senza attrito ad un quadrante di raggio R. L'estremo A del filo è fissato al bordo del quadrante, mentre l'estremo B è sollecitato da un carico concentrato $\boldsymbol{q} = -\alpha m g \boldsymbol{e}_y$. Supponendo trascurabile la gravità, trovare per quali valori di α il filo resta sempre a contatto con il quadrante se quest'ultimo viene messo in rotazione con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega} = 4\sqrt{g/R}\boldsymbol{e}_y$ attorno all'asse OA.*

In assenza di gravità, l'unica sollecitazione da considerare è la forza centrifuga, che sappiamo essere conservativa. Sia ϑ l'angolo formato con la verticale dal raggio OP congiungente O con un punto qualsiasi P del filo. Poiché l'energia potenziale specifica in P è

$$v = -16mg \sin^2 \vartheta \,,$$

la tensione in P è

$$\tau = -16mg \sin^2 \vartheta + c$$

con c costante da determinare imponendo la condizione al contorno $\tau(B) \equiv \tau(\frac{\pi}{2}) = \alpha m g$. Svolti i calcoli, si ottiene

$$\tau = 16mg \cos^2 \vartheta + \alpha m g \,.$$

La condizione di contatto impone che la componente ϕ_n della reazione vincolare specifica lungo la normale principale $\boldsymbol{n}$ (entrante nel supporto) sia negativa. Dall'equazione di equilibrio indefinita dei fili abbiamo

$$\phi_n = -\frac{\tau}{R} - f_n \leq 0$$

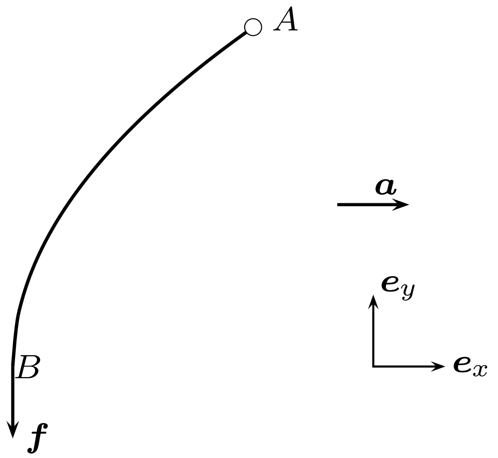
dove $f_n = -\frac{32m}{R} g \sin^2 \vartheta$ è la proiezione lungo $\boldsymbol{n}$ della forza centrifuga per unità di lunghezza. La condizione di contatto diventa così

$$\frac{16}{R} mg \cos^2 \vartheta + \alpha \frac{mg}{R} - \frac{32m}{R} g \sin^2 \vartheta = \alpha \frac{mg}{R} + \frac{16m}{R} g - \frac{48m}{R} g \sin^2 \vartheta \geq 0$$

per tutti i $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Pertanto, deve essere

$$\alpha \geq 32 \,.$$

Esercizio 6.10 *In un piano, un filo AB omogeneo di lunghezza ℓ e densità lineare di massa $2m/\ell$ è vincolato all'estremo A, mentre è soggetto ad una forza verticale $\boldsymbol{f} = -\frac{1}{2} mg \boldsymbol{e}_y$ in B, dove g ha le dimensioni di una accelerazione. Il piano che*



contiene il filo trasla con accelerazione costante $\boldsymbol{a} = \frac{g}{2} \boldsymbol{e}_x$. Trovare lo spostamento d di B rispetto alla verticale per A, in condizioni di equilibrio e supponendo trascurabile la gravità.

Nel riferimento non inerziale che trasla con accelerazione uniforme il filo risulta soggetto ad una forza fittizia di densità lineare $-\frac{mg}{\ell} \boldsymbol{e}_x$ e dunque il profilo descritto all'equilibrio è una catenaria con asse di simmetria parallelo all'asse $\boldsymbol{e}_x$ e vertice in B. Vista la sollecitazione in B si ha $\psi = mg/2$ e dunque, preso come vertice proprio il punto B, si ha

$$x(y) = \frac{\ell}{2} \left[\cosh \left(\frac{2y}{\ell} \right) - 1 \right] .$$

Per valutare $d = x_A$ serviamoci del fatto che AB ha lunghezza ℓ per cui

$$\int_{y_A}^{0} \sqrt{1 + \sinh^2 \left(\frac{2y}{\ell} \right)} \mathrm{d}y = \int_{y_A}^{0} \cosh \left(\frac{2y}{\ell} \right) \mathrm{d}y = \frac{\ell}{2} \sinh \left(\frac{2y_A}{\ell} \right)$$

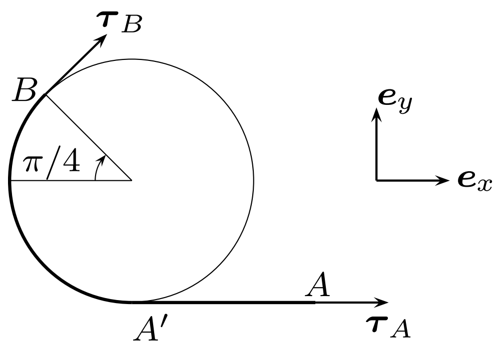
da cui si ottiene

$$\sinh\left(\frac{2y_A}{\ell}\right) = 2$$

da cui segue che

$$d = x(y_A) = \frac{\ell}{2}[\sqrt{5} - 1]\,.$$

Esercizio 6.11 *In assenza di forze attive esterne, un filo AB è avvolto per il tratto $A'B$ attorno ad una circonferenza di raggio R ed è tenuto teso grazie alle forze $\boldsymbol{\tau}_A = 2p\boldsymbol{e}_x$, applicata in A e $\boldsymbol{\tau}_B = p\boldsymbol{n}$, con $\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)$, applicata in B. Qual*



è il minimo coefficiente di attrito statico μ tra filo e circonferenza compatibile con l'equilibrio nelle condizioni descritte?

Detta $s = R\vartheta$ l'ascissa curvilinea lungo il tratto appoggiato di filo, contata a partire da A', le equazioni indefinite di equilibrio per un filo richiedono

$$\begin{cases} \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\vartheta} + \phi_t = 0 \\ \frac{\tau}{R} + \phi_n = 0, \end{cases}$$

dal momento che non agiscono forze esterne. La condizione di Coulomb-Morin garantisce l'equilibrio finché $|\phi_t| \le \mu|\phi_n|$, ovvero finché

$$\left|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\vartheta}\right| \le \mu\tau\,.$$

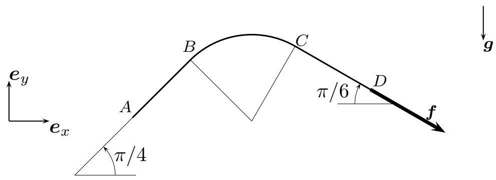
Integrando questo sistema di disequazioni disuguaglianze differenziali ricaviamo

$$-\mu\Delta\vartheta \le \ln\frac{\tau_B}{\tau_A} \le \mu\Delta\vartheta\,,$$

dove $\Delta\vartheta = \frac{3\pi}{4}$ è l'ampiezza dell'arco su cui è appoggiato il filo. Con i dati del problema si vede che la sola disuguaglianza non banale è

$$\mu \geq \frac{4}{3\pi} \ln 2\,.$$

Esercizio 6.12 *In un piano verticale, un filo omogeneo AD di lunghezza $(\frac{5\pi}{12}+6)R$ e peso per unità di lunghezza $3p/2$ è appoggiato ad un sostrato formato da un arco di cerchio di raggio R e da due segmenti rettilinei inclinati di $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{6}$ sull'orizzontale. Gli appoggi sull'arco BC e sul segmento CD sono privi di attrito, mentre quello sul segmento AB è caratterizzato da un coefficiente di attrito statico μ. Il punto D è*



sollecitato da una forza $\boldsymbol{f}$ di intensità $4pR$ tangente al segmento CD e la lunghezza del tratto CD è $2R$. In condizioni di equilibrio determinare: il valore della tensione nel punto C; il valore della tensione nel punto di AD di quota massima; il valore minimo di μ perché il filo sia in equilibrio.

Detto $\boldsymbol{e}$ il versore associato a $D - C$, la tensione nel punto C si trova imponendo l'equilibrio delle forze per la porzione di filo CD, nella direzione di $\boldsymbol{e}$. Su CD agisce la tensione $\boldsymbol{\tau}_D = \boldsymbol{f} = 4pR\boldsymbol{e}$, la tensione in C, $\boldsymbol{\tau}_c = -\tau_C\boldsymbol{e}$ e la proiezione della forza peso $-3pR\boldsymbol{e}_y$, pari a $\frac{3}{2}pR\boldsymbol{e}$. Abbiamo allora

$$-\tau_C + 4pR + \frac{3}{2}pR = 0$$

e quindi

$$\tau_C = \frac{11}{2}pR.$$

Se $\vartheta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\pi]$ è il valore dell'angolo che il generico raggio OP forma con $\boldsymbol{e}_x$, la tensione in P vale

$$\tau(\vartheta) = c + \frac{3}{2}pR\sin\vartheta$$

e la costante di integrazione c si può determinare imponendo che $\tau_C = \tau(\frac{\pi}{3})$, cosicché

$$c = \frac{11}{2}pR - \frac{3}{4}\sqrt{3}pR.$$

La tensione nel punto di quota massima è allora

$$\tau(\frac{\pi}{2}) = pR\left[7 - \frac{3}{4}\sqrt{3}\right]$$

e la tensione all'estremo B vale $\tau_B = \tau(\frac{3}{4}\pi) = pR[\frac{11}{2} + \frac{3}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{3})]$. Passando al tratto AB, osserviamo che la tensione in A, estremo libero, essa è nulla e che dai dati del problema, deve essere$AB = 4R$. La condizione di equilibrio per AB, dove agisce l'attrito è

$$|\phi_t| \leq \mu|\phi_n|$$

dove le componenti della reazione vincolare si ottengono dalle equazioni di equilibrio indefinite dei fili

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} + f_t + \phi_t = 0$$

e

$$\phi_n + f_n = 0.$$

In questo caso la forza attiva è la forza peso e se orientiamo il tratto AB nel verso che va da A a B abbiamo

$$f_t = -\frac{3\sqrt{3}}{4}p = f_n$$

pertanto la condizione di equilibrio diventa

$$\left|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} - \frac{3\sqrt{3}}{4}p\right| \leq \mu\frac{3\sqrt{3}}{4}p$$

che si traduce nella coppia di disequazioni

$$(1-\mu)\frac{3\sqrt{3}}{4}p \leq \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} \leq (1+\mu)\frac{3\sqrt{3}}{4}p$$

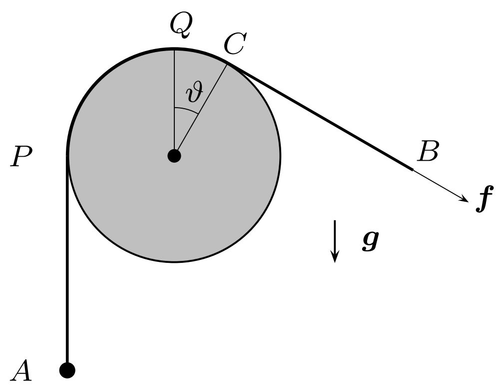
che, integrate tra $s = 0$ ed $s = 4R$ forniscono

$$3(1-\mu)\sqrt{3}pR \leq pR[\frac{11}{2} + \frac{3}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{3})] \leq 3(1+\mu)\sqrt{3}pR$$

da cui si ottiene finalmente la condizione su μ

$$\mu \geq \frac{11}{12}\sqrt{2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{8}\sqrt{6}.$$

Esercizio 6.13 *In un piano verticale, un filo omogeneo AB di massa trascurabile e lunghezza ℓ è appoggiato ad un profilo circolare di raggio r lungo l'arco $PR = \vartheta + \frac{\pi}{2}$; il loro reciproco contatto è caratterizzato da un coefficiente di attrito statico $\frac{1}{2}$. All'estremo A è appeso un corpo puntiforme di massa $2m$, mentre all'estremo B è applicata una forza di intensità $f = \gamma mg$. Calcolare i valori di γ compatibili con l'equilibrio, quando $\vartheta = \frac{\pi}{6}$.*



Tagliando il filo in P e Q, dall'equilibrio di AP segue che la tensione in P è $\tau_P = 2mg$, mentre dall'equilibrio di BC ricaviamo la tensione in C, $\tau_C = \gamma mg$. Sul tratto PC valgono le equazioni di equilibrio indefinite

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\tau}{R\mathrm{d}\vartheta} + \Phi_t = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\tau}{R} + \Phi_n = 0\,, \tag{6.20}$$

dove Φ_t e Φ_n sono le componenti della reazione vincolare specifica lungo il filo. La relazione di Coulomb e Morin impone

$$|\Phi_t| \leq \mu|\Phi_n|$$

o, grazie alle equazioni (6.20),

$$\left|\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\vartheta}\right| \leq \mu\frac{\tau}{R}$$

da cui si ottiene, inseriti i valori di μ e ϑ,

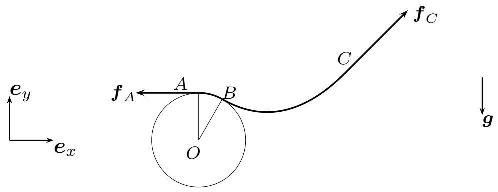
$$e^{-\frac{\pi}{3}} \leq \frac{\tau_P}{\tau_C} \leq e^{\frac{\pi}{3}}$$

o, grazie ai valori delle tensioni in C e P

$$2e^{-\frac{\pi}{3}} \leq \gamma \leq 2e^{\frac{\pi}{3}}\ :$$

la limitazione superiore indica che, se f è troppo grande, il filo non può restare in equilibrio nella configurazione proposta perché viene trascinato via aumentando BC mentre se f è troppo piccola, il filo viene trascinato via aumentando AP.

Esercizio 6.14 *In un piano verticale, un filo AC omogeneo di lunghezza opportuna e peso per unità di lunghezza $2mg/R$ ha un tratto AB appoggiato senza attrito su un disco fisso di centro O e raggio R ed un tratto BC libero. Il tratto AB sottende un arco di $\pi/6$, mentre BC è mantenuto in equilibrio applicando in C una forza $\boldsymbol{f}_C$*



di intensità $\sqrt{2}\gamma mg$, inclinata di $\pi/4$ sull'orizzontale. Sapendo che in A agisce una forza $\boldsymbol{f}_A = -14mg\boldsymbol{e}_x$, determinare, in condizioni di equilibrio, la tensione del filo nel punto A; il valore di γ compatibile con l'equilibrio e, in corrispondenza, il dislivello $\Delta y = y_C - y_B$.

Il modulo della tensione in A è,

$$\tau_A = |\boldsymbol{f}_A| = 14mg\,.$$

Indicato con $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{6}]$ l'angolo che il generico raggio OP del supporto forma con la verticale, la tensione lungo il tratto AB è

$$\tau(\vartheta) = 2mg\cos\vartheta + c$$

e sfruttando il valore della tensione in A, dove $\vartheta = 0$, otteniamo $c = 12mg$ per cui

$$\tau(\vartheta) = 2mg(\cos\vartheta + 6)$$

e pertanto $\tau_B = \tau(\frac{\pi}{6}) = mg(12 + \sqrt{3})$. Lungo il tratto BC il filo si dispone lungo una catenaria e la componente costante della tensione nella direzione $\boldsymbol{e}_x$ è pari a $\psi = \tau_B \cos\frac{\pi}{6} = mg\frac{\sqrt{3}}{2}(12 + \sqrt{3})$. Poiché in C la tensione coincide con $|\boldsymbol{f}_C|$, si deve anche avere $\psi = |\boldsymbol{f}_C|\cos\frac{\pi}{4} = \gamma mg$ e quindi abbiamo

$$\gamma = 3\left(\frac{1}{2} + 2\sqrt{3}\right)\,.$$

Per trovare il dislivello Δy tra B e C scriviamo l'equazione della catenaria riferendola ad assi centrati nel suo vertice, cosicché

$$y(x) = \frac{\psi}{p}\left[\cosh\left(\frac{p}{\psi}x\right) - 1\right]\,,$$

dove $p = 2mg/R$ è il peso specifico del filo. D'altra parte la derivata prima dell'arco di catenaria è

$$y'(x) = \sinh\left(\frac{p}{\psi}x\right)$$

e dunque, per la geometria del problema, abbiamo

$$y'(x_B) = \tan\frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \sinh\left(\frac{p}{\psi}x_B\right)$$

da cui segue, usando la relazione $\cosh^2\alpha - \sin^2\alpha = 1$,

$$\cosh\left(\frac{p}{\psi}x_B\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

Similmente si ha

$$y'(x_C) = \tan\frac{\pi}{4} = 1 = \sinh\left(\frac{p}{\psi}x_C\right)$$

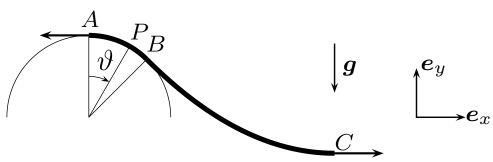
e dunque

$$\cosh\left(\frac{p}{\psi}x_C\right) = \sqrt{2}\,.$$

Abbiamo in definitiva

$$\Delta y = \frac{\psi}{p}\left(\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = R\left[3\sqrt{6} - 6 + \frac{3}{4}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]\,.$$

Esercizio 6.15 *In un piano verticale, un filo AC omogeneo di peso specifico $3p$ ha il tratto AB che sottende un angolo di ampiezza $\vartheta_0 < \frac{\pi}{2}$ a contatto senza attrito con un semidisco di raggio R, mentre il tratto BC è libero. In A e C sono applicate due forze orizzontali, $-2pR\boldsymbol{e}_x$ e $pR\boldsymbol{e}_x$, rispettivamente. Detto $\vartheta \in [0, \vartheta_0]$ l'angolo che*



la verticale forma con un raggio generico determinare, in condizioni di equilibrio, la tensione in ogni punto di AB, in funzione di ϑ, il valore di ϑ_0 e la lunghezza del tratto libero BC.

Preso come livello di riferimento per l'energia potenziale gravitazionale l'orizzontale passante per il centro del supporto, l'energia potenziale specifica in P vale $3pR\cos\vartheta$ e dunque la tensione lungo l'arco appoggiato AB vale

$$\tau(\vartheta) = 3pR\cos\vartheta + c;$$

per trovare il valore di c osserviamo che in A, dove $\vartheta = 0$, la tensione deve essere pari al modulo $2pR$ della forza concentrata in quel punto per cui $c = -pR$ e quindi

$$\tau(\vartheta) = pR(3\cos\vartheta - 1)\,:$$

in paticolare, nel punto B la tensione vale $\tau_B = pR(3\cos\vartheta_0 - 1)$. Consideriamo ora l'arco di catenaria BC ed osserviamo anzitutto che in B la retta tangente alla catenaria deve coincidere con quella al supporto e pertanto è inclinata di ϑ_0 sull'orizzontale. Il modulo della componente della tensione lungo $\boldsymbol{e}_x$ vale allora

$$\psi = \tau_B \cos\vartheta_0 = pR(3\cos\vartheta_0 - 1)\cos\vartheta_0$$

e, siccome deve restare costante lungo tutto l'arco BC, deve essere anche $\psi = pR$, visto che in C la tensione è diretta lungo l'orizzontale ed ha modulo pari a pR. Abbiamo allora la condizione di compatibilità su ϑ_0

$$pR(3\cos\vartheta_0 - 1)\cos\vartheta_0 = pR$$

da cui si ottiene, come solo valore compatibile con la limitazione $\vartheta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\cos\vartheta_0 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}.$$

Fissata l'origine di un riferimento con assi lungo $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ in C, l'equazione della catenaria è

$$y(x) = \frac{R}{3}\left[\cosh\left(\frac{3x}{R}\right) - 1\right]$$

e dunque

$$y'(x) = \sinh\frac{3x}{R}. \tag{6.21}$$

La lunghezza dell'arco BC è

$$\ell_{BC} = \int_{x_B}^{0} \sqrt{1+(y'(x))^2}\mathrm{d}x = \int_{x_B}^{0} \sqrt{1+\sinh^2\frac{3x}{R}}\mathrm{d}x = \int_{x_B}^{0} \cosh\frac{3x}{R}\mathrm{d}x$$

dove abbiamo usato l'identità $\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$. Dunque

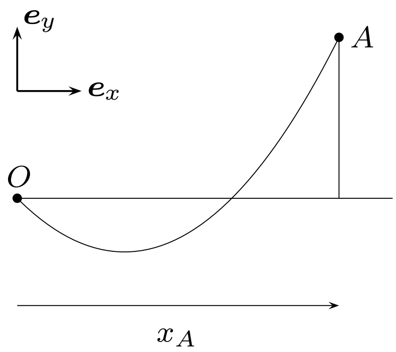
$$\ell_{BC} = -\frac{R}{3}\sinh\frac{3x_B}{R}$$

e, grazie all'equazione (6.21), abbiamo che

$$\sinh\frac{3x_B}{R} = y'(x_B).$$

Siccome $y'(x)$ è la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta al profilo della catenaria forma con la direzione $\boldsymbol{e}_x$, in questo caso abbiamo $y'(x_B) = \tan(\pi - \vartheta_0) = -\tan_0$ e la lunghezza dell'arco BC è

$$\ell_{BC} = \frac{R}{3}\tan\vartheta_0 = \frac{R}{3}\frac{\sqrt{1-\cos^2\vartheta_0}}{\cos\vartheta_0} = \frac{\sqrt{32-2\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}.$$



Esercizio 6.16 *In un piano verticale, un filo omogeneo OA di peso specifico costante descrive all'equilibrio l'arco di catenaria*

$$y(x) = \frac{x_0}{2}[\cosh\left(\frac{2x}{x_0} - \ln\sqrt{2}\right) - \cosh(\ln\sqrt{2})]$$

delimitato dall'origine O e dal punto A di ascissa $x_A = x_0 \ln\sqrt{3}$. Trovare l'ascissa x_G del centro di massa di OA.

Oltre alla gravità applicata nel centro di massa G del filo, le altre forze esterne sono le reazioni vincolari in O ed in A il cui modulo coincide con le il valore delle tensioni in quei punti. Poiché le tensioni in O ed A sono dirette lungo le tangenti al filo in quei punti, l'equilibrio dei momenti delle forze esterne rispetto al punto P il punto di intersezione di tali rette tangenti, impone che G appartenga alla verticale per P. Per risolvere il problema occorre trovare l'ascissa x_P di P. Scriviamo le equazioni delle rette tangenti al filo in O ed A. Poiché

$$y'(x) = \sinh\left(\frac{2x}{x_0} - \ln\sqrt{2}\right)$$

l'equazione della tangente in O al filo è

$$y = -\sinh(\ln\sqrt{2})x$$

mentre quella della tangente in A è

$$y = \frac{x_0}{2}[\cosh\left(2\ln\sqrt{3} - \ln\sqrt{2}\right) - \cosh(\ln\sqrt{2})] + \sinh\left(2\ln\sqrt{3} - \ln\sqrt{2}\right)(x - x_0\ln\sqrt{3}),$$

che può essere semplificata grazie alle definizioni delle funzioni iperboliche e le proprietà dei logaritmi osservando che

$$\cosh\left(2\ln\sqrt{3} - \ln\sqrt{2}\right) = \frac{11}{6\sqrt{2}} \qquad \sinh\left(2\ln\sqrt{3} - \ln\sqrt{2}\right) = \frac{7}{6\sqrt{2}}$$

e

$$\cosh(\ln\sqrt{2}) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \qquad \sinh(\ln\sqrt{2}) = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

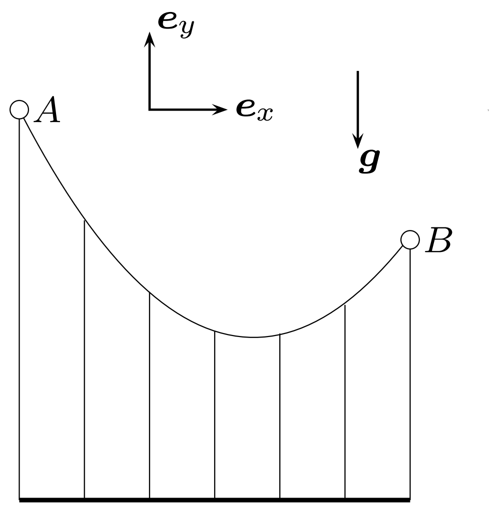
per cui

$$y = \frac{x_0}{6\sqrt{2}} + \frac{7}{6\sqrt{2}}(x - x_0\ln\sqrt{3}).$$

Intersecando le rette tangenti appena trovate si ottiene a

$$x_P = x_G = \frac{7\ln\sqrt{3} - 1}{10}x_0 .$$

Esercizio 6.17 *In un piano verticale, un ponte di lunghezza 2ℓ e peso per unità di lunghezza p viene sospeso grazie ad un numero molto grande di tiranti ad un cavo che congiunge due punti fissi A e B aventi dislivello pari ad ℓ. Sapendo che all'equilibrio*



il punto più basso del cavo si trova a dislivello 2ℓ sotto A, trovare il rapporto ϱ tra il massimo ed il minimo valore della tensione nel cavo.

Se disponiamo gli assi $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ in A, il ponte sospeso deve passare per i punti $A \equiv (0,0)$ e $B \equiv (2\ell, -\ell)$. Dalla prima condizione otteniamo

$$y(x) = \frac{p}{2\psi}x^2 + bx$$

mentre il passaggio per B impone il legame

$$2\frac{p}{\psi}\ell + 2b + 1 = 0 .$$

Un ulteriore legame tra ψ a b si ottiene che $y_V = -2\ell$ per cui

$$y\left(-\frac{\psi}{p}b\right) = -2\ell$$

da cui si ottiene

$$\frac{p}{\psi} = \frac{b^2}{4\ell}$$

che, messo a sistema con la relazione precedente fornisce l'equazione per b

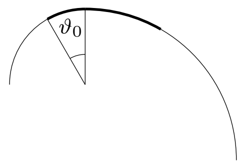
$$b^2 + 4b + 2 = 0$$

che è risolta da $b = -2 \pm \sqrt{2}$ di cui occorre selezionare la radice con il doppio segno negativo per garantire che il vertice sia interno all'intervallo delimitato da A eb B. A tal proposito, osserviamo che il vertice è interno ads AB se e solo se $y'(x_B) > 0$. Eseguendo una verifica diretta si osserva che solo il valore $b = -(2+\sqrt{2})$ soddisfa a questo requisito. Per rispondere al quesito del problema osserviamo che il minimo della tensione, pari a ψ, si ha nel vertice, mentre il massimo corrisponde al punto dove la derivata del profilo del ponte sospeso ha modulo massimo in quanto $\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = \psi\sqrt{1 + y'(x)^2}$, visto che $y'(x)$ è la tangente trigonometrica dell'angolo formato dal profilo di equilibrio con l'asse delle ascisse. Dunque

$$\varrho = \frac{\tau_A}{\tau_V} = \sqrt{1 + y'(x_A)^2} = \sqrt{1 + b^2} = \sqrt{7 + 4\sqrt{2}}\,.$$

31 gennaio 2002

In un piano verticale, un filo di peso specifico costante p e lunghezza $\pi R/2$ è appoggiato senza attrito ad un supporto formato da due quadranti aventi raggio $R/2$ e R. Trovare il valore dell'angolo ϑ_0 in condizioni di equilibrio.



La tensione del tratto di filo appoggiato al quadrante di raggio $R/2$ è del tipo $\tau = v + c$, con v energia potenziale specifica e c una costante; similmente, per il tratto restante è $\tau = v + c^*$. Nel punto comune dei due tratti la quota è ovviamente la stessa e le due tensioni debbono coincidere, per cui $c = c^*$. D'altra parte, se ϑ_1 è il valore all'equilibrio dell'angolo formato con la verticale dal filo che giace sul supporto di raggio R, dobbiamo avere $\tau(\vartheta_0) = \tau(\vartheta_1) = 0$, visto che agli estremi non è applicato alcun carico. Dunque la condizione di equilibrio diventa $v(\vartheta_0) = v(\vartheta_1)$, cioè

$$p\frac{R}{2}(1 + \cos\vartheta_0) = pR\cos\vartheta_1 \tag{6.22}$$

Il vincolo sulla lunghezza del filo impone

$$\frac{\pi R}{2} = \frac{R\vartheta_0}{2} + R\vartheta_1$$

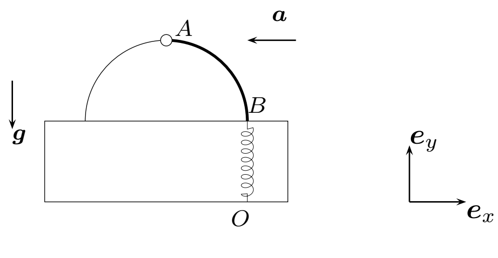
da cui otteniamo $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta_0}{2}$ che permette di riscrivere (6.22) come equazione per ϑ_0

$$\sin\frac{\vartheta_0}{2} = 1 - \sin^2\frac{\vartheta_0}{2},$$

dove abbiamo impiegato le formule trigonometriche di duplicazione. Risolvendo quest'ultima equazione rispetto a $\sin\frac{\vartheta_0}{2}$, ricaviamo

$$\vartheta_0 = 2\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Esercizio 6.18 *Un filo omogeneo AB di lunghezza $\frac{\pi R}{2}$ e densità lineare di massa $\frac{2p}{g}$ è appoggiato senza attrito su di un supporto semicircolare di raggio R che, a sua volta, è rigidamente collegato ad una lamina rettangolare. Il filo è vincolato in A al supporto mentre l'estremo B è soggetto ad una forza elastica di costante βp che lo richiama verso il punto O della lamina posto sulla verticale per B a distanza R da B. Se, in presenza di gravità, il sistema trasla con accelerazione costante $\boldsymbol{a} = -5g\boldsymbol{e}_x$,*



qual è il minimo valore di β compatibile con il contatto tra disco e filo?

Anzitutto, conviene mettersi nel riferimento non inerziale che trasla con l'accelerazione a del sistema; in tal caso, oltre alla forza peso distribuita con densità lineare $\boldsymbol{f}_p = -2p\boldsymbol{e}_y$, occorre considerare la forza apparente, di densità $\boldsymbol{f}_a = -\frac{2p}{g}\boldsymbol{a} = 10p\boldsymbol{e}_x$ Possiamo parametrizzare la curva che descrive il filo usando l'angolo ϑ che misura l'ampiezza dell'arco compreso tra il generico punto P del filo e l'estremo B. Per calcolare la tensione, domandiamoci se la forza atviva specifica $f = \boldsymbol{f}_p + \boldsymbol{f}_a$ è conservativa, cioè se soddisfa l'equazione

$$\boldsymbol{f} = 10p\boldsymbol{e}_x - 2p\boldsymbol{e}_y = -\nabla v \tag{6.23}$$

per una qualche funzione v dipendente solo dalle coordinate (x, y) di P. Proiettando la (6.23) lungo $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$, otteniamo le che v deve soddisfare il sistema

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -10p \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2p$$

e dunque, a meno di inessenziali costanti additive, essa vale

$$v = 2p(y - 5x) = 2pR(\sin\vartheta - 5\cos\vartheta),$$

dove abbiamo osservato che, rispetto al centro del supporto, le coordinate di P sono $x = R\cos\vartheta$ e $y = R\sin\vartheta$. Il valore della tensione lungo il filo è allora

$$\tau(\vartheta) = 2pR(\sin\vartheta - 5\cos\vartheta) + c$$

e per trovare c imponiamo che in B, dove $\vartheta = 0$, la tensione uguagli l'intensità della forza elastica lì applicata. Abbiamo allora

$$-10pR + c = \beta pR$$

e quindi

$$\tau(\vartheta) = 2pR[\sin\vartheta + 5(1 - \cos\vartheta)] + \beta pR.$$

In un punto come P, il versore della normale principale $\boldsymbol{n}$ al filo è diretto radialmente al supporto, con verso *entrante* in quest'ultimo; Affinché vi sia contatto nel corso del moto, occorre che la reazione vincolare distribuita, che ha la forma $\boldsymbol{\Phi} = \phi_n\boldsymbol{n}$ in quanto non vi sono attriti, abbia

$$\phi_n \leq 0$$

cosicché il supporto eserciti effettivamente una forza che sostenga il filo. Per ricavare ϕ_n ricordiamo che la proiezione dell'equazione di equilibrio indefinita dei fili lungo $\boldsymbol{n}$ è

$$\frac{\tau}{R} + \phi_n + f_n = 0$$

dove abbiamo osservato che la curvatura del supporto, e quindi del filo, è $\kappa = 1/R$, mentre dalla (6.23) abbiamo

$$f_n = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} = 2p(\sin\vartheta - 5\cos\vartheta).$$

Dunque otteniamo la condizione di contatto

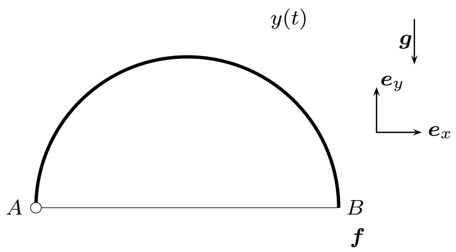
$$\phi_n = -\frac{\tau}{R} - f_n = 2p(10\cos\vartheta - 2\sin\vartheta - 5) - \beta p \leq 0 \qquad \forall\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]:$$

affinché questa disuguaglianza sia soddisfatta per tutti i valori di ϑ richiesti, occorre e basta che il massimo assoluto del membro di sinistra nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ sia non positivo: poiché sia $\cos\vartheta$ che $-\sin\vartheta$ sono funzioni monotone decrescenti in questo intervallo, basta chiedere che la disuguaglianza valga per $\vartheta = 0$, ottenendo dunque

$$\beta \geq 10,$$

che rappresenta la condizione da imporre per garantire il contatto.

3 novembre 2006 *In un piano verticale, un filo AB omogeneo di lunghezza πR e densità lineare di massa $3m/R$ è appoggiato senza attrito su un supporto semicircolare di raggio R che è libero di traslare lungo la direzione $\boldsymbol{e}_y$ con legge oraria $y(t) = 6R\cos\sqrt{\frac{2g}{R}}t$. L'estremo A è fissato al supporto, mentre in B è applicata la forza $\boldsymbol{f} = -\delta mg\boldsymbol{e}_y$. Trovare il minimo valore di δ compatibile con il contatto del filo con il supporto.*



In assenza di attrito, l'equazione di equilibrio indefinita lungo la tangente al filo è

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} + f_t = 0.$$

Introduciamo l'angolo ϑ contato a partire da B cosicché si ha $s = R\vartheta$. La componente della forza peso per unità di lunghezza lungo la tangente al filo è $-\frac{3mg}{R}\cos\vartheta$ mentre la forza fittizia, di densità lineare $\frac{36mg}{R}\cos\sqrt{\frac{2g}{R}}t\boldsymbol{e}_y$ ha componente $\frac{36mg}{R}\cos\sqrt{\frac{2g}{R}}t\cos\vartheta$. Dunque si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{3mg}{R}\cos\vartheta - \frac{36mg}{R}\cos\sqrt{\frac{2g}{R}}t\cos\vartheta$$

che, integrata, fornisce

$$\tau(\vartheta) = c + 3mg\sin\vartheta - 36mg\cos\sqrt{\frac{2g}{R}}t\sin\vartheta$$

dove la costante c si determina imponendo $\tau(0) = \delta mg$ ottenendo infine

$$\tau(\vartheta) = \delta mg + 3mg\sin\vartheta - 36mg\cos\sqrt{\frac{2g}{R}}t\sin\vartheta.$$

La proiezione dell'equazione di equilibrio nella direzione della normale principale al supporto è

$$\frac{\tau}{R} + f_n + \phi_n = 0$$

dove ora ϕ_n è la componente della reazione vincolare per unità di lunghezza. Il contatto è garantito finché $\phi_n \leq 0$ in tutti i punti del filo e ad ogni istante. Poiché

$$f_n = \frac{3mg}{R}\sin\vartheta - 36\frac{mg}{R}\cos\sqrt{\frac{2g}{R}}t\sin\vartheta$$

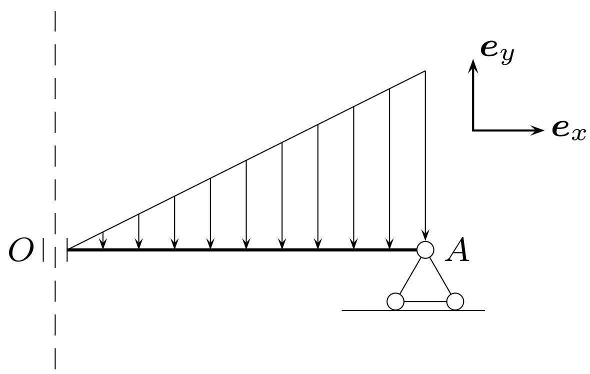
la condizione di contatto è

$$-\frac{6mg}{R}\sin\vartheta + 72\frac{mg}{R}\cos\sqrt{\frac{2g}{R}}t\sin\vartheta - \delta\frac{mg}{R} \leq 0$$

che è soddisfatta $\forall\vartheta \in [0,\pi]$ e $\forall t$ se e solo se

$$\delta \geq 66.$$

Esercizio 6.19 *Una verga euleriana OA di lunghezza ℓ e rigidità flessionale $B = 14p\ell^3$ è rettilinea nella configurazione indeformata. L'estremo O della verga è vincolato a terra da un incastro scorrevole, mentre l'estremo A è vincolato da un appoggio bilatero. Sulla verga è applicato un carico avente densità lineare $\boldsymbol{f} = -\alpha p\frac{x}{\ell}\boldsymbol{e}_y$. Nell'ipotesi di piccole deflessioni, trovare il valore di α per cui, all'equilibrio, l'estremo*



O si trova ad una quota $y(0) = -\frac{\ell}{140}$.

Introduciamo le coordinate (x, y) riferite all'origine O, orientando i corrispondenti assi cartesiani lungo le direzioni $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ indicate in Figura. Le equazioni di equilibrio dell'asta sono

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}' + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\Gamma}' + \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{6.24}$$

dove $\boldsymbol{\Phi}$ è lo sforzo interno all'asta e $\boldsymbol{\Gamma} = Bc\boldsymbol{b}$ è il momento flettente, espresso in termini della curvatura c dell'asta e del versore binormale $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_z$. Nell'ipotesi di piccole deflessioni le derivate che compaiono nelle equazioni di equilibrio si possono considerare effettuate rispetto alla variabile x, il versore tangente $\boldsymbol{t}$ è approssimabile con $\boldsymbol{e}_x$ e la curvatura è data da $c(x) = y''(x)$. Le equazioni di equilibrio vanno abbinate ad opportune condizioni al contorno che tengano in considerazione il tipo di sollecitazione cui è sottoposta la verga alle estremità. Poiché in O, corrispondente ad $x = 0$, vi è un incastro scorrevole che impedisce le rotazioni, la tangente alla verga deve essere diretta lungo $\boldsymbol{e}_x$, direzione ortogonale a quella di scorrimento del carrello. Pertanto si ha la condizione $y'(0) = 0$. Nell'estremo A, dove $x = \ell$, il carrello bilatero non esplica momento e dunque deve annullarsi il momento flettente, cosicché $c(\ell) = y''(\ell) = 0$. Inoltre, poiché il carrello non consente traslazioni lungo $\boldsymbol{e}_y$, deve anche essere $y(\ell) = 0$. Grazie all'espressione di $\boldsymbol{f}$ possiamo ricavare $\boldsymbol{\Phi}$ dalla $(6.24)_1$ come

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{\alpha p}{2\ell} x^2 \boldsymbol{e}_y \,,$$

dove si è osservato che la costante (vettoriale) di integrazione deve annullarsi in quanto dovrebbe essere simultaneamente parallela ad $\boldsymbol{e}_x$, per tener conto della sollecitazione indotta in $x = 0$ dall'incastro scorrevole e parallela ad $\boldsymbol{e}_y$ per rispettare la sollecitazione in $x = \ell$ indotta dall'appoggio bilatero. Sostituendo il valore appena trovato per $\boldsymbol{\Phi}$ nella $(6.24)_2$ ed utilizzando l'ipotesi di piccole deflessioni abbiamo

$$14\ell^3 y''' + \frac{\alpha}{2\ell} x^2 = 0 \,,$$

da risolvere con le condizioni al contorno

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(\ell) = 0 \\ y''(\ell) = 0 \,. \end{cases} \tag{6.25}$$

Dopo una prima integrazione ricaviamo, grazie a $(6.25)_3$

$$y''(x) = -\frac{\alpha}{84\ell^4}(x^3 - \ell^3) \,.$$

Integrando ancora e tenendo conto di $(6.25)_1$ abbiamo poi

$$y''(x) = -\frac{\alpha}{84\ell^4}(\frac{x^4}{4} - \ell^3 x)$$

ed infine, con l'ausilio di $(6.25)_2$, concludiamo che

$$y(x) = -\frac{\alpha}{84\ell^4}\left(\frac{x^5}{20} - \ell^3\frac{x^2}{2} + \frac{9}{20}\ell^5\right) \,.$$

Imponendo la condizione $y(0) = -\frac{\ell}{140}$, otteniamo

$$\alpha = \frac{4}{3}\,.$$

Esercizio 6.20 *Una verga euleriana rettilinea di lunghezza ℓ è caricata da una distribuzione costante di coppie con densità $-p\boldsymbol{e}_z$. L'estremo O è incastrato, mentre l'estremo B è libero. Se la rigidezza flessionale della verga (coefficiente di proporzionalità tra curvatura e momento flettente) è $A = \frac{p\ell^2}{4}$, qual è il profilo di equilibrio della verga, nell'ipotesi di piccole deflessioni dalla configurazione indeformata?*

Sia s l'ascissa curvilinea della verga, misurata partendo da O. Il versore tangente $\boldsymbol{t}$ si esprime come

$$\boldsymbol{t} = \cos\vartheta(s)\boldsymbol{e}_x - \sin\vartheta(s)\boldsymbol{e}_y = x'(s)\boldsymbol{e}_x + y'(s)\boldsymbol{e}_y, \tag{6.26}$$

dove le coordinate (x, y) sono riferite al punto O, come indicato nella figura b). Le equazioni di equilibrio per la verga sono

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}' + \mathbf{f} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Gamma}' + \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{\Phi} + \mathbf{g} = \mathbf{0} \end{cases}$$

dove $\boldsymbol{\Phi}$ è lo sforzo interno all'asta e Γ il momento flettente, mentre $\mathbf{f}$ è la densità di carico distribuita e $\mathbf{g}$ la densità di coppia distribuita. L'ipotesi di verga euleriana si traduce nella relazione

$$\boldsymbol{\Gamma} = Ac\boldsymbol{b} \tag{6.27}$$

che lega il momento flettente alla curvatura $c = \vartheta'$ della verga. Nel caso in esame $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{e}_z$, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{g} = -p\boldsymbol{e}_z$ e dunque le equazioni di equilibrio diventano

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}' = \mathbf{0} \\ -A\vartheta''\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{\Phi} - p\boldsymbol{e}_z = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Dalla prima equazione segue $\boldsymbol{\Phi}(s) = \mathbf{k} = \mathbf{0}$, visto che l'estremo B non è soggetto a carichi o coppie concentrate. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$\vartheta'' = -\frac{4}{\ell^2}$$

che, integrata due volte, fornisce

$$\vartheta(s) = -\frac{2}{\ell^2}s^2 + c_1 s + c_2$$

con c_1 e c_2 costanti di integrazione. Per determinarle, notiamo che in O vi è un incastro completo e dunque $\vartheta(0) = 0$, mentre in B l'estremo è libero e dunque $\mathbf{\Gamma}(\ell) = \mathbf{0}$ da cui segue, in virtù di (6.27), $\vartheta'(\ell) = 0$. Imponendo queste condizioni al contorno otteniamo $c_1 = \frac{4}{\ell}$, $c_2 = 0$ e dunque

$$\vartheta(s) = -\frac{4s}{\ell^2}(\frac{s}{2} - \ell).$$

Per risalire al profilo di equilibrio ricorriamo all'ipotesi di piccole deflessioni dalla configurazione indeformata imponendo $|\vartheta(s)| \ll 1$. Riscrivendo (6.26) nell'approssimazione adottata, abbiamo $x'(s) = 1$ e $y'(s) = -\vartheta(s)$. In particolare, integrando $x'(s) = 1$ otteniamo $x = s$: possiamo cioè confondere l'ascissa curvilinea s con la variabile x. Abbiamo pertanto

$$y'(s) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \vartheta(s) = \vartheta(x) = -\frac{4x}{\ell^2}(\frac{x}{2} - \ell)$$

e, integrando,

$$y(x) = -\frac{4}{\ell^2}(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2\ell}{2}) + c_3.$$

Di nuovo, poiché l'estremo O è incastrato, $y(0) = 0$ e dunque

$$y(x) = \frac{2x^2}{3\ell^2}(x - 3\ell).$$

6.3 Esercizi proposti