Capitolo 6

Il teorema fondamentale dell'algebra

6.1 Le prime formulazioni

La storia del teorema fondamentale dell'algebra si potrebbe sommariamente suddividere in queste fasi:

1. formulazione del teorema senza alcuna dimostrazione (inizio del XVII secolo);

2. primi tentativi di dimostrazione ad opera di Eulero, D'Alembert (1717-1783), Lagrange (1736-1813), de Foncenex (seconda metà del XVIII secolo);

3. prima dimostrazione del teorema *sostanzialmente* rigorosa dovuta a Gauss (1777-1855) del 1799;

4. dimostrazioni successive (dal 1811 in poi).

Questo schema, peraltro comodo didatticamente, è stato criticato da Gilain [1] che ha osservato come esso mescoli due storie distinte, quella relativa al teorema fondamentale dell'algebra (TFA, usando l'abbreviazione di Gilain) ed il teorema di fattorizzazione lineare (TFL). In termini moderni il TFA si può formulare in uno di questi modi:

1. ogni polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi possiede almeno una radice complessa;

2. ogni polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi si scompone nel prodotto di n fattori lineari a coefficienti complessi ed ammette n radici complesse, eventualmente coincidenti;

3. formulazioni analoghe alle precedenti che limitano l'attenzione a polinomi con coefficienti reali;

4. ogni polinomio di grado $n \geq 1$ a coefficienti reali si può scomporre nel prodotto di fattori reali di primo o secondo grado.

Il TFL si enuncia dicendo che, per ogni polinomio $p(x)$ in un'incognita di grado n a coefficienti in un campo K, esiste un campo $L \supseteq K$, detto campo di spezzamento del polinomio, nel quale $p(x)$ ha n radici. Benché quando $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$ gli enunciati del TFA e del TFL si confondano, i due teoremi non hanno bisogno l'uno dell'altro per essere dimostrati: le dimostrazioni del TFA basate sull'analisi complessa non utilizzano il TFL che, d'altra parte, si può presentare *indipendentemente* dal TFA e non fa alcun riferimento alla *forma* delle radici che invece viene precisata nel TFA quando si considerino coefficienti nel campo reale o complesso.

Fatta questa precisazione, seguirò ancora lo schema sopra riportato cercando di precisare, sulla scorta del lavoro di Gilain, in quale storia vadano inseriti i vari contributi. In questa sezione ci occupiamo della prima fase, cercando di comprendere come si sia potuto arrivare alla formulazione del teorema. Successivamente ci occuperemo dello stretto legame tra l'analisi ed il teorema fondamentale che si delineò a partire dall'inizio del XVIII secolo e di cui resta traccia in una delle tecniche dimostrative, quella analitica.

Il teorema fondamentale dell'algebra si affacciò sulla scena della storia delle equazioni algebriche in epoca relativamente tarda: una prima formulazione debole si trova nella *Arithmetica Philosophica* di Peter Roth, un testo pubblicato a Norimberga nel 1608 la cui influenza su Cartesio è stata recentemente studiata in [2]. Afferma Roth:

un'equazione ha al più tante radici quanto è il suo grado; alcune equazioni hanno esattemente tante radici quanto è il loro grado.

La forma debole dell'enunciato è dovuta al fatto che Roth non considerava né le radici immaginarie né contava nel modo opportuno le eventuali radici multiple. Un'altra formulazione più netta ma ancora con qualche riserva si trova nella *Invention Nouvelle en l'Algebre* pubblicata da Albert Girard nel 1629. Qui il teorema fondamentale viene enunciato ma non vi è alcun tentativo di dimostrarlo:

Ogni equazione algebrica ammette tante soluzioni quanto mostrato dalla denominazione della più alta quantità, eccettuate le equazioni incomplete.[1] [3]

Girard, che pure considera radici immaginarie di equazioni, sembra riferire ad un'eccezione nel teorema quando parla delle equazioni incomplete, quelle cioè per le quali uno o più coefficienti sono nulli. Tra l'altro, Girard giustifica l'utilità delle radici immaginarie in questi termini:

È opportuno sempre ricordarsi di questo: a chi domandasse a cosa servono queste soluzioni che sono impossibili, rispondo che sono utili per tre cose: per

[1] Toutes les equations d'algebre reçoivent autant de solutions, que la denomination de la plus haute quantité le demonstre, excepté les incomplettes.

l'esattezza della regola generale, per la sua utilità e perché non esistono altre soluzioni.[2]

Dunque tra i motivi che richiedono l'introduzione dei numeri complessi vi è proprio la salvaguardia del teorema fondamentale (*la reigle generale*). La riserva sulle equazioni incomplete—che in effetti non viene mai richiamata durante la *explication* del teorema che tiene il posto della dimostrazione [1]—può forse spiegarsi col fatto che Girard utilizzava in modo sistematico le relazioni tra radici e coefficienti di un'equazione come metodo risolutivo delle equazioni algebriche. Ora, se i coefficienti di un'equazione sono tutti presenti, non vi è dubbio che vi siano n di queste relazioni, mentre l'assenza di un coefficiente potrebbe suggerire la mancanza di una relazione e quindi portare ad un numero ridotto di radici. Tuttavia, quando Girard affronta la soluzione di $x^4 = 4x - 3$ egli correttamente trova che le quattro *factions* sono 0, 0, 4 e 3 e da questo fatto ricava tutte le soluzioni dell'equazione. Secondo Gilain tuttavia, quello di Girard è un enunciato che si può vedere come una forma molto imperfetta del TFA perché non viene precisata la *natura* delle radici immaginarie, anche se negli esempi considerati queste sono sempre nella forma $a + b\sqrt{-1}$. Prova convincente che non ci si sente di escludere quantità immaginarie di forma differente da questa è un testo di Jean Prestet, *Nouveaux Élements d'Algèbre* del 1689 in cui egli considera diversi tipi di quantità immaginarie (*absurdité*) che dipendono dal grado dell'equazione che le genera. Le assurdità lineari erano per Prestet i numeri negativi, prodotti dalle equazioni di primo grado; le assurdità di secondo grado fanno intervenire le radici dei numeri negativi mentre non vi sono assurdità di terzo grado, perché ogni equazione di terzo grado si può sempre scomporre in un fattore lineare reale ed uno di secondo grado. Al contrario, un'equazione di quarto grado come $x^4 + a^4 = 0$ genera assurdità ancora più complicate di quelle di secondo grado, del tipo $\sqrt{\sqrt{-a^4}}$: più in generale, per Prestet esistono una infinità di radici immaginarie di tipo differente, legate alle equazioni di grado 2^n.

Un atteggiamento ancora dubbioso sul contenuto del TFA si trova nella *Géométrie* di Cartesio che dapprima lo enuncia nella forma

Ogni equazione può avere tante radici distinte quanto è la dimensione dell'incognita nell'equazione ([4], p. 159)

La cautela *può avere* (*peut il avoir*) è forse dovuta al fatto che Cartesio considerava vere solo le radici positive. Peraltro, discutendo le equazioni cubiche più avanti ([4], p. 175) Cartesio sembra sbilanciarsi maggiormente quando dichiara

Né le radici vere né quelle false di un'equazione sono sempre reali; talora esse sono immaginarie cioè, mentre posso sempre concepire tante radici di ogni equazione quante ho già assegnate, tuttavia non sempre esiste una quantità definita corrispondente ad una radice così immaginata. Per esempio, mentre possiamo sempre immaginare che un'equazione come $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ *abbia tre radici, tuttavia vi è una sola radice reale, 2, mentre le altre due, comunque pos-*

[2] Deon il se faut resouvenir d'observer tousjours cela: on pourroit dire à quoy sert ces solution qui sont impossibles, je respond pur trois choses, pour la certitude de la reigle generale, & qu'il ny a point d'autre solutions, & pour son utilité.

siamo aumentarle, diminuirle o moltiplicarle seguendo le regole appena stabilite, restano sempre immaginarie.

Osserviamo l'attribuzione di un segno alle radici immaginarie che mostra quanto vaghe fossero le idee all'epoca sui numeri complessi: abbiamo visto i problemi causati nella corretta interpretazione della regola dei segni di Cartesio nel Cap. 5. In effetti non stupisce che il teorema fondamentale dell'algebra abbia tardato ad essere formulato nella sua completezza perché, trattandosi di un teorema sul numero di radici, finché non è chiaro *quali* sono le radici da considerare, si può al più formulare una limitazione superiore di tale numero, proprio come hanno fatto Roth e Cartesio. Questo stato di cose si mantiene ancora un secolo dopo con Isaac Newton (1643-1727) che nella *Arithmetica Universalis*, la cui prima edizione risale al 1707, afferma che un'equazione di grado n ha al più n soluzioni:

In verità, un equazione può avere tante radici quanto è la sua dimensione e non di più.[3] ([5], p.181)

Che n rappresenti una limitazione superiore al numero di radici segue facilmente una volta che si sia realizzato che $x = x_1$ risolve l'equazione algebrica $p(x) = 0$ se e solo se $p(x)$ è diviso da $x - x_1$, proprietà asserita da Cartesio in generale, presente anche in Roth e Faulhaber ma già osservata da tempo per le equazioni cubiche da Cardano e, prima ancora, per quelle quadratiche. Si vede allora che, se vi fossero più di n radici, $p(x)$, prodotto dei vari fattori $x - x_i$ dovrebbe avere grado superiore ad n, al contrario di quanto asserito: in questo senso [1] si tratta di una formulazione più vicina al TFL che non al TFA.

6.2 Un problema di analisi

Un tornante di grande importanza nella storia del TFA è rappresentato da un problema di analisi oggetto di studio approfondito fin dagli albori del XVIII secolo: l'integrazione dei differenziali razionali, cui si occuparono in prima battuta Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e Johann Bernoulli I (1667-1748) pubblicando i primi risultati a partire dal 1702. Con formalismo vicino ai giorni nostri, il problema di Leibniz e Bernoulli si esprime nella ricerca di

$$\int \frac{r(x)}{q(x)} dx$$

dove r e q sono due polinomi, con $\deg r < \deg q$. Entrambi utilizzarono la stessa tecnica: la scomposizione della funzione razionale in una somma di elementi semplici che a sua volta poggia sulla fattorizzazione di $q(x)$ in termini di fattori lineari che viene presa come un dato di fatto, un postulato evidente:

Per prima cosa suppongo dall'algebra che i divisori semplici di qualunque espressione razionale intera siano in qualche modo noti; [...] E dunque, dalle ipotizzate risoluzioni algebriche delle equazioni si otterranno i divisori delle

[3] Potest vero aequatio tot radices quot sunt dimensiones ejus, & non plures.

espressioni e questa nostra analisi infinitesimale presuppone l'analisi algebrica, come quanto è superiore presuppone ciò che è inferiore.[4] ([6] in [1], p. 98)

Le scomposizioni effettuate consentono di ricondurre l'integrazione a quella di un'iperbole–$adx/(x + f)$, che conduce a logaritmi reali, ovvero a settori circolari, come nel caso di $adx/(a^2 + x^2)$. In quest'ultimo caso Bernoulli osserva la possibilità di utilizzare logaritmi di quantità immaginarie, argomento su cui Leibniz e Bernoulli avranno una lunga controversia. Leibniz, dal canto suo, dopo essere riuscito ad effettuare la scomposizione

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

riducendo così il calcolo di $\int 1/(x^4 - 1)dx$ alla quadratura dell'iperbole e del cerchio, osserva che lo stesso accadrà tutte le volte in cui il denominatore di una frazione razionale non possiede che divisori reali di primo ovvero di secondo grado ed è così condotto a formulare questo problema:

Questo stato di cose ci conduce pertanto ad una questione di estrema importanza, se cioè tutte le quadrature razionali siano riducibili alla quadratura dell'iperbole e del cerchio, questione che da qui ci riporta a questa nostra analisi: se cioè ogni equazione algebrica o espressione reale intera razionale possa fattorizzarsi in divisori razionali semplici o di secondo grado.[5] ([6], in [1], p.99)

Ecco dunque come il problema della quadratura di funzioni razionali dipende dal TFA nella quarta accezione, secondo lo schema di Gilain riportato sopra. Il punto importante è che Leibniz dà una risposta *negativa* al problema, ritenendo impossibile tale fattorizzazione in generale, per tutti i polinomi. Per questo egli propone un *controesempio* considerando il polinomio $x^4 + a^4$ che fattorizza dapprima in $(x^2 + a^2\sqrt{-1})(x^2 - a^2\sqrt{-1})$ e poi in

$$(x + a\sqrt{\sqrt{-1}})(x - a\sqrt{\sqrt{-1}})(x + a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}})$$

per concludere circa l'impossibilità di ridurre il polinomio proposto, combinando questi fattori, ad un trinomio reale. I lavori di Leibniz e Bernoulli, al di là del loro indubbio valore nel consentire l'estensione della classe di funzioni integrabili esplicitamente, forniscono un enunciato chiaro del TFA svincolato dal TFL: il secondo viene *assunto* come principio indiscutibile mentre il primo viene addirittura respinto da Leibniz: mentre il TFL è alla base della scomposizione di una frazione razionale in elementi semplici i cui denominatori sono di primo grado, il TFA cerca di stabilire la possibilità di una scomposizione in fattori *reali* di primo o secondo grado. Il fatto che Leibniz neghi la validità del TFA ribadisce una volta ancora quanta incertezza regnasse attorno alla natura dei numeri

[4] Primo ex Algebra suppono divisores simplices cujusque formulae rationalis integrae utcunque cognitos; [...] Itaque ex suppositis resolutionibus aequationum Algebraicis habentur divisores formularum, et nostra haec Analysis infinitesimalis Analysin Algebraicam, ut superior inferiorem, supponit.

[5] Hic jam ordo nos ducit ad maximi momenti Quaestionem, utrum omnes quadraturae rationales ad quadraturam hyperbolae et circuli reduci possint, quae huc redit in nostra hac Analysis: utrum omnis aequatio algebraica seu formula realis integra quad indeterminatam rationalis possit resolvi in divisores rationales simplices aut planos.

immaginari. L'errore di Leibniz tuttavia destò l'interesse intorno al problema della scomposizione in fattori reali lineari o quadratici di un polinomio qualsiasi che porteranno, mezzo secolo più tardi a coagulare il consenso dei matematici attorno alla possibilità di rispondere in modo *affermativo* al problema di Leibniz, grazie al lavoro di Eulero e D'Alembert: per Gilain, il punto di partenza della storia del TFA va collocato proprio con la memoria di Leibniz del 1702.

Ora, scomposizioni di polinomi come $x^4 + a^4$ in fattori reali erano già state ottenute da Newton almeno dal 1676. Nel 1702 egli aveva forse già minor interesse per la matematica e quindi non si prese cura di segnalare l'errore di Leibniz che fu evidenziato nel 1719 da Nicholas Bernoulli I (1687-1759), figlio di Johann, in una nota apparsa sugli *Acta Eruditorum* di Lipsia dove egli osservò semplicemente che si poteva scrivere [7]

$$x^4 + a^4 = (x^2 + a^2)^2 - 2a^2x^2 = (x^2 + a^2 + \sqrt{2}ax)(x^2 + a^2 - \sqrt{2}ax).$$

Una risposta sistematica che smontava definitivamente l'argomento di Leibniz venne dal matematico inglese Roger Cotes (1682-1716) che il 5 maggio 1716, un mese prima di morire precocemente, indirizzò al matematico gallese William Jones (1675-1749) una lettera in cui dichiarava di avere ricondotto a misure di rapporti e di angoli, cioè a funzioni logaritmiche e circolari, le fluenti (cioè le primitive) delle flussioni $\left(d\dot{x}x^{\theta\eta+\frac{\delta}{\lambda}\eta-1}\right)/(e+fx^\eta)$ dove d, e ed f sono costanti, $\theta \in \mathbb{Z}$ e $\delta/\lambda < 1$, con δ e λ entrambi naturali. Oltre a sottolineare l'avanzamento rispetto a quanto ottenuto da Newton che aveva considerato i casi $\delta/\lambda = 0$ e $\delta/\lambda = 1/2$, Cotes allude al lavoro di Leibniz del 1702 osservando che i suoi risultati permettevano di rispondere al problema di Leibniz in senso opposto a quanto asserito dallo studioso tedesco. Cotes, che afferma nella stessa lettera di aver ottenuto la fluente della flussione di

$$\left(d\dot{x}x^{\theta\eta+\frac{\delta}{\lambda}\eta-1}\right)/(e+fx^\eta+gx^{2\eta})$$

dove ora λ è una potenza di 2, conclude

In verità sono portato a credere che la grande questione del Sig. Leibniz andrebbe risolta in senso opposto e che alla fine sarà possibile trovare che la fluente di qualsiasi flussione razionale dipende davvero da misure di rapporti ed angoli, con l'eccezione di quelle ottenibili in termini finiti anche senza il ricorso a misure.[6] ([8], in [1], p.102)

I risultati di Cotes apparvero postumi nella *Harmonia Mensurarum* pubblicata nel 1722 e poggiano su eleganti argomenti geometrici la cui dimostrazione fu fornita da Abraham De Moivre (1667-1754).

Il contenuto della lettera di Cotes servì nel 1719 ad un altro matematico inglese, Brook Taylor, per lanciare una sfida ai matematici continentali in cui

[6] In truth I am inclined to believe, that Mr. Leibniz's grand question ought to be determined the contrary way, and that it will be found at last, that the fluent of any rational fluxion whatever does depend upon the measures of ratios and angles, excepting those which may be had in finite terms even without introducing measures.

veniva chiesta l'integrazione di

$$\frac{x^r dx}{x^{2m} + ax^m + b},$$

che coincide con l'espressione trinomia analizzata da Cotes. La risoluzione fu piuttosto rapida e già nel 1719 Johann Bernoulli e Jacob Hermann fornirono la scomposizione adeguata del denominatore, così come poco più tardi fece il matematico italiano Giulio Carlo Fagnano (1682-1766) [9]. In particolare, Hermann introdusse i *divisori primitivi* come i polinomi che non si possono scomporre nel prodotto di altri di grado minore, cioè i polinomi irriducibili, benché non affermi che tali polinomi debbono in ogni caso avere grado minore od uguale al secondo. In questo contesto si colloca anche la *Miscellanea Analyica de seriebus et quadraturis* di Abraham De Moivre, pubblicata nel 1730. Qui, oltre a migliorare alcuni risultati di Cotes operando ipotesi meno restrittive, De Moivre offre uno studio dettagliato della scomposizione del polinomio *reciproco* di quarto grado

$$x^4 + px^3 + qx^2 + px + 1 = 0$$

nel prodotto di due trinomi reali, estendendo il risultato ai polinomi reciproci di sesto grado. Nel 1738 De Moivre scrisse una lettera a William Jones in cui mostrò come trovare le radici n-esime di un numero immaginario $a + \sqrt{-1}b$ nella forma $x + \sqrt{-1}y$ grazie all'ausilio della trigonometria. Ad ogni buon conto, nella matematica pre-euleriana non vi è riscontro del TFA mentre il TFL viene assunto valido *a priori*. Come esempio di questo atteggiamento possiamo considerare due passaggi tratti da due opere di Colin MacLaurin che, nel *Treatise of fluxions* del 1742, afferma

Appare dunque che la fluente di

$$\frac{x^r \dot{x}}{x^{2n} - Ax^{2n-1} + Bx^{2n-2} - \text{etc}}$$

si può ottenere tramite archi circolari e logaritmi nei casi in cui il denominatore sia il prodotto di divisori quadratici qualsiasi.[7] ([10], in [1], p. 105) denotando una estrema prudenza nell'enunciato da cui emerge come Mc Laurin non si pronunci sulla proprietà dei polinomi asserita dal TFA. Al contrario, nel *A Treatise of Algebra*, postumo, del 1748, egli afferma

Ed un'equazione di dimensione qualsiasi può considerarsi come il prodotto di tante equazioni semplici quanto è la sua dimensione.[8] ([11], in [1], p. 105) da cui emerge invece il suo utilizzo del TFL.

[7] And thus it appears how the fluent of

$$\frac{x^r \dot{x}}{x^{2n} - Ax^{2n-1} + Bx^{2n-2} - \text{etc}}$$

is assignable by circular arcs and logarithms when the denominator is the product of any quadratic divisors.

[8] And an equation of any dimension may be considered as produced by the multiplication of as many simple equations as it has dimensions.

6.3 Eulero e il TFA

Il TFA entrava in un altro problema analitico, la risoluzione delle equazioni differenziali omogenee, lineari, di ordine n ed a coefficienti costanti, problema affrontato da Eulero nel 1743 nella memoria *De integratione aequationum differentialium altiorum graduum* [12]. È noto che Eulero, ponendo $y = e^{px}$, ridusse il problema dell'integrazione di

$$0 = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + N\frac{d^ny}{dx^n}$$

alla risoluzione dell'equazione algebrica in p

$$A + Bp + Cp^2 + \cdots + Np^n = 0.$$

Qui, supponendo sempre valida la scomposizione di un polinomio in fattori reali lineari o quadratici, Eulero fornì una completa classificazione dei casi possibili, mostrando n integrali indipendenti dell'equazione differenziale. Dunque questo lavoro dipende concettualmente dalla validità del TFA e d'altra parte Eulero aveva già manifestato in una lettera del 15 settembre 1739 indirizzata a Johann Bernoulli la propria convinzione della validità di tale scomposizione.

Si risolva, se possibile, questa espressione [$1 - ap + bp^2 - cp^3 + dp^4 - ep^5 + \cdots = 0$] in fattori reali semplici di questa forma: $1 - \alpha p$; se però ciò non è possibile, la si risolva in fattori di dimensione due di questa forma: $1-\alpha p+\beta pp$. Una tale risoluzione può veramente essere sempre ottenuta ed in questo modo, l'espressione di prima si potrà ottenere come prodotto o di fattori semplici $1-\alpha p$ o di dimensione due, come $1 - \alpha p + \beta pp$, tutti reali.[9] ([13], pp.37-38, in [1], p. 106)

In una lettera del 1 settembre 1742 indirizzata a Nicholas Bernoulli (1687-1759), Eulero enuncia ancora in termini simili il TFA oltre a precisare che le radici immaginarie di un'equazione algebrica sono sempre in numero pari e sono abbinabili in coppie il cui prodotto è reale.

Ogni espressione algebrica $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. di grado qualsiasi, è sempre risolubile in fattori trinomiali reali $p+qx+rxx$, quando non è risolubile in fattori reali semplici $p + qx$.[10] ([1], p.107)

Nicholas Bernoulli si mostra però scettico circa la generalità della fattorizzazione proposta da Eulero e nella risposta del 24 ottobre seguente propone un controesempio nel polinomio

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4 = 0 \tag{6.1}$$

[9]Haec expressio [$1 - ap + bp^2 - cp^3 + dp^4 - ep^5 + \cdots = 0$] si fieri potest in factores simplices reales hujus formae $1-\alpha p$ resolvatur: si autem hoc fieri nequeat, resolvatur in factores duarum dimensionum hujus formae $1 - \alpha p + \beta pp$, quae resolutio realiter sempre institui potest, hocque modo prodibit superior expressio sub forma producti ex factoribus vel simplicibus $1 - \alpha p$ vel duarum dimensionum $1 - \alpha p + \beta pp$, omnibus realibus.

[10]Ut omnis expressio algebraica $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. quotcunque fuerit dimensionum, si non in factores simplices $p + qx$ omnes reales resolvi queat, ea saltem in factores trinomiales $p + qx + rxx$, qui omnes sint reales, semper resolubilis existat.

le cui quattro radici immaginarie $1 \pm \sqrt{2+\sqrt{-3}}$, $1 \pm \sqrt{2-\sqrt{-3}}$ non possono per lui essere abbinate in modo da formare dei fattori quadratici reali del polinomio di partenza: si tratta di un esempio più fine ma dello stesso tenore di quello proposto da Leibniz nel 1702. Eulero riconosce in una lettera a Christian Goldbach (15 dicembre 1742) di essere stato colpito dal controesempio di Bernoulli, al punto da avere per un momento nutrito dei dubbi sulla validità della scomposizione in fattori reali lineari o quadratici: qui egli parla del TFA come di una sorta di teorema di Fermat, *una specie di teorema di Fermat* (*ungefähr wie einige theoremata Fermatiana*). Tuttavia, il 10 novembre 1742, Eulero aveva già risposto a Bernoulli ribadendo la validità del TFA di cui asseriva possedere una dimostrazione rigorosa per i polinomi di grado non superiore a quattro, fornendo in particolare la scomposizione del polinomio (6.1). Eulero è convinto dell'importanza fondamentale del TFA per i problemi dell'integrazione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti e per l'integrazione delle funzioni razionali e invita Bernoulli a contribuire alla risoluzione del problema, in un senso o nell'altro. Anche Goldbach dal canto suo era dubbioso circa la validità del TFA e propose egli pure un controesempio con un polinomio della forma $x^4 + px + q$ commettendo però un errore di calcolo che Eulero notò in una lettera diretta a Goldbach, datata 26 febbraio 1743, dove anche forniva la scomposizione in fattori quadratici reali in un caso sufficientemente generale da abbracciare l'esempio numerico di Goldbach. Nella stessa lettera, Eulero affermava anche di avere dimostrato il TFA per polinomi di grado non superiore a 6 e per le equazioni della forma

$$\alpha x^{5n} + \beta x^{4n} + \gamma x^{3n} + \delta x^{2n} + \varepsilon x^n + \zeta = 0.$$

Un'idea del metodo di Eulero si può avere dalla lettera del 6 aprile 1743 in cui Nicholas Bernoulli, riconscendo il proprio errore ed essendo ormai convinto della validità del TFA, afferma

Il tuo metodo per trovare i fattori trinomiali di equazioni algebriche per mezzo di angoli funziona correttamente.[11] (*cfr.* [9], p. 310) suggerendo trattarsi di un metodo basato sul ricorso alle funzioni trigonometriche. In questa lettera, Bernoulli fa un'osservazione che giocherà un ruolo centrale negli sviluppi successivi: egli asserisce che il TFA sarà dimostrato quando si potrà dimostrare che *ogni* quantità immaginaria può sempre ridursi alla forma $a + b\sqrt{-1}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Eulero (lettera del 14 maggio 1743) condivide l'idea di Bernoulli che ogni quantità immaginaria sia della forma $a + b\sqrt{-1}$, benché dichiari di non avere idea sul modo di dimostrare tale affermazione. Inoltre Eulero, che vuole ottenere direttamente la scomposizione reale di un polinomio, osserva, facendo ricorso al TFL, che i coefficienti dei fattori quadratici nella scomposizione di un polinomio di grado $2n$ risolvono un'equazione di grado n i cui coefficienti possono essere assunti reali perché radici di equazioni algebriche di cui è noto *a priori* che il grado è dispari. La successiva risposta di Bernoulli è molto importante e giunge il 29 novembre 1743. Qui egli mostra che il metodo proposto da Eulero è fragile in quanto non permette di determinare la realtà o meno dei coefficienti

[11] Recte se habet methodus tua inveniendi factores trinomiales algebraicae ope angulorum.

dei fattori quadratici e propone un'altra strada, ispirandosi alla scomposizione dell'equazione di quarto grado in fattori quadratici reali suggerita da Cartesio. La possibilità di effettuare tale scomposizione utilizzando i polinomi $x^2+\alpha x+\beta$ e $x^2-\alpha x+\delta$ poggia sull'osservazione che α^2 è soluzione di un'equazione di terzo grado il cui termine costante è *negativo*. Bernoulli procede suggerendo lo schema della dimostrazione nel caso generale osservando dapprima che la scomposizione in fattori quadratici reali di un'equazione generale si riduce ad operarla su equazioni di grado 2^n, per le quali si ipotizza una scomposizione i cui fattori sono di grado dimezzato

$$x^{2^{n-1}}+\alpha x^{2^{n-1}-1}+a x^{2^{n-1}-2}+\cdots=0 \qquad \text{e} \qquad x^{2^{n-1}}-\alpha x^{2^{n-1}-1}+a_1 x^{2^{n-1}-2}+\cdots=0 \tag{6.2}$$

dove α^2 si potrà determinare per mezzo di una equazione di grado dispari. Quindi tutta la difficoltà della dimostrazione, che ogni equazione algebrica si può risolvere in equazioni quadratiche reali, si riduce a poter dimostrare che la quantità α^2 è sempre positiva. (*cfr.* [9], p.311).

Bernoulli non dice nulla sul metodo seguito per approdare ad un'equazione di grado dispari per α^2. Eulero risponde il 4 febbraio 1744 sottolineando il fatto che basta trovare un valore reale per α, anche se non è importante conoscerlo a priori. Eulero dimostra allora che α deve obbedire ad un'equazione di grado pari ma con termine noto negativo. Dunque si può dire che nel 1744 possedesse gli elementi essenziali per ottenere la dimostrazione del TFA che però comparirà solo nel 1751 anche se consegnata all'accademia delle scienze di Berlino per l'anno 1749. Inoltre, quando nel 1748 viene pubblicata a Losanna la *Introductio in analysin infinitorum* [14], opera fondamentale tesa a conferire un fondamento algebrico all'analisi, i riferimenti al problema del teorema fondamentale si riducono ai seguenti:

1. Cap. II, *De transformatione functionum*: viene enunciato il TFL in questo modo ([14])

   È evidente che un fattore di secondo grado si compone di due fattori semplici, uno di terzo grado in tre fattori semplici e così via. Da ciò segue che una funzione intera della stessa z nella quale l'esponente della potenza più alta della z è n, conterrà n fattori semplici.[12] Ancora una volta questo teorema viene presentato come qualcosa di evidente per il quale non vi è bisogno di dimostrazione.

2. Cap. II: compare un enunciato del TFA per equazioni di quarto grado: *Se vi fosse un fattore Q reale ottenuto dal prodotto di quattro fattori semplici immaginari, allora lo stesso Q si potrà risolvere nel prodotto di due fattori semplici reali.*[13] [14] Di tale enunciato Eulero fornisce una dimostrazione incompleta dal momento che presuppone la possibilità di scrivere in

[12] Perspicuum autem est factorem duplicem duos complecti factores simplices, factorem triplicem tres simplices et ita porro. Hinc functio ipsius z integra, in qua exponens summae potestatis ipsius z est n, continebit n factores simplices.

[13] Si fuerit Q productum reale ex quator factoribus simplicibus imaginariis, tum idem hoc productum Q resolvi poterit in duos factores duplices reales.

ogni caso Q come prodotto di due fattori quadratici a coefficienti immaginari della forma $a + b\sqrt{-1}$. In ogni caso egli si spinge a suggerire una generalizzazione affermando

Benché non sia possibile estendere a potenze superiori la stessa tecnica di dimostrazione, tuttavia appare fuor di dubbio che la stessa proprietà compete a qualunque fattore immaginario, cioè che è sempre possibile sostituire n fattori di secondo grado reali a 2n fattori immaginari semplici. Da ciò segue che ogni funzione intera della stessa z si potrà risolvere nel prodotto di fattori reali o semplici o di secondo grado.[14] [14].

Poco dopo rinvia il lettore al Cap. IX dicendo

Anche se ciò non è stato dimostrato con sommo rigore, la verità di quanto affermato si rafforzerà ancor più nel seguito.[15] [14]

3. Cap. IX, *De investigatione factorum trinomialium*: Eulero si serve delle cosiddette formule di De Moivre—$(\cos\phi \pm \sqrt{-1}\sin\phi)^n = \cos n\phi \pm \sqrt{-1}\sin n\phi$, con $n \in \mathbb{N}$—scompone in fattori reali i polinomi della forma $a^n \pm z^n$ e $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n}$ aggiungendo:

   Anche questi esempi confermano che ogni funzione intera è risolubile in fattori reali semplici o di secondo grado[16] [14].

   Eulero estende la classe per cui la scomposizione vale servendosi dei risultati sui polinomi di quarto grado illustrati al capitolo II e del fatto che ogni equazione di grado dispari ammette una radice reale. I polinomi studiati da Eulero sono

   $$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n}, \quad \alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n},$$

   e

   $$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n} + \zeta z^{5n}.$$

   Eulero, concludendo, afferma che:

   E dunque, se fosse ancora rimasto qualche dubbio su questo modo di risolvere tutte le funzioni intere, ora dovrebbe essere scomparso quasi del tutto[17] [14].

Come sottolineato da Gilain, i passi citati suggeriscono la convinzione di Eulero della validità del TFA che egli cerca di trasmettere al lettore, pur nella mancanza

[14] Quanquam autem eundem demonstrandi modum ad altiores potestates extendere non licet, tamen extra dubium videtur esse positum eandem proprietatem in quotcunque factores imaginarios competere, ita ut semper loco $2n$ factorum simplicium imaginariorum induci quaent n factores duplices reales. Hinc omnis functio integra ipsius z resolvi poterit in factores reales vel simplices vel duplices

[15] Quod quamvis non summo rigore sit demonstrandum, tamen ejus veritas in sequentibus magis corroboratur.

[16] Confirmatur ergo etiam his exemplis omnem functionem integram in factores reales sive simplices sive duplices resolvi posse.

[17] Quare si ullum dubium mansisset circa huiusmodi resolutionem omnium functionum integrarum, hoc nunc fere penitus tolletur.

di una dimostrazione rigorosa completa. Quest'ultimo fatto può destare sorpresa, considerato il fatto che già nel 1744 Eulero era più avanti nella dimostrazione del teorema. Per Gilain, questo scarto è dovuto al lasso di tempo intercorso tra la stesura e la stampa della *Introductio*. A conferma di questa ipotesi egli cita un passo di una risposta inviata da Eulero a D'Alembert che faceva seguito ad alcune critiche di quest'ultimo sulla *Introductio* ed in cui Eulero ammette che

Le vostre osservazioni sulla mia Introduzione non sono che troppo ben fondate; ma non sarete più sorpreso degli errori che vi si trovano a proposito dei fattori trinomiali [...], quando vi avrò detto che quest'opera è stata tre anni circa a Losanna e che io l'avevo completata qualche tempo prima. In quel momento, lo ammetto francamente, non avevo ancora una dimostrazione solida del fatto che ogni espressione algebrica è risolubile in fattori trinomiali reali.[18] [1]

In questa risposta vi è una coerenza interna perché se l'*Introductio* cristallizza lo stato dell'arte nel 1743, siamo al momento in cui Eulero vede ancora lontana la dimostrazione del teorema, come aveva scritto a Goldbach il 26 febbraio di quell'anno.

Ed eccoci alla memoria di Eulero sul TFA [15], *Recherches sur les racines imaginaires des équations*, apparsa nel 1751 tra le memorie dell'accademia di Berlino per l'anno 1749, dove Eulero propone due dimostrazioni del TFA, entrambe scorrette. La seconda, più breve, si basa sul tentativo di dimostrare che ogni radice di un'equazione algebrica deve essere della forma $M + N\sqrt{-1}$, con $M, N \in \mathbb{R}$. Per questo egli evoca i risultati del 1746 di D'Alembert che aveva mostrato la stabilità della forma $M + N\sqrt{-1}$ sotto l'azione delle operazioni algebriche fondamentali. Grazie a questo ed alle formule di Viète-Girard, Eulero ritiene di aver concluso, poiché queste formule

non contengono altre operazioni oltre le quattro comuni che non siano se non estrazioni di radice senza che vi si mescoli alcuna operazione trascendente.[19] [15]

Proprio quest'ultima affermazione inficia la validità del ragionamento di Eulero in quanto, come dimostreranno Ruffini ed Abel oltre mezzo secolo più tardi, per le equazioni di grado superiore al quarto questa affermazione è *falsa*. L'altro punto debole nella dimostrazione di Eulero è il ricorso alle formule di Viète-Girard che *presuppongono* l'esistenza delle radici e dunque non possono essere utilizzate in una dimostrazione del TFA. Si tratta di un abbaglio in cui altri matematici dopo Eulero cadranno, primo fra tutti Lagrange, e che verrà messo in evidenza da Gauss nella prima delle sue dimostrazioni del TFA, quella del 1799 [16]. Ancora una volta può avere giocato un ruolo fuorviante il fatto di considerare il TFL come un dato *a priori*.

La prima dimostrazione proposta da Eulero in [15] segue i suggerimenti di Nicholas Bernoulli e inaugura la tradizione delle dimostrazioni *algebriche*

[18] Vos remarques sur mon Introduction ne sont que trop bien fondées; mais vous ne serez plus surpris des fautes qui s'y trouvent par rapport aux facteurs trinômes [...], quand je vous dirai que cet ouvrage a été presque trois ans à Lausanne et que je l'avais achevé déjà quelques temps auparavant. Alors, j'avoue franchement que je n'avais pas encore une démonstration solide, que toute expression algébrique est résoluble en facteurs trinômes réels.

[19] ne contiennent point d'autres opérations que l'extraction des racines, outre le quatre opérations vulgaires, et l'on ne saurait soutenir que des opérations transcendentes s'y mêlassent.

del TFA. A patto di moltiplicarla per un opportuno fattore x^k, un'equazione algebrica si può scrivere nella forma

$$x^{2^n} + px^{2^n-1} + qx^{2^n-2} + \cdots = 0$$

ovvero, eliminando il coefficiente p con la consueta trasformazione $x \mapsto x - \frac{p}{2^n}$,

$$x^{2^n} + mx^{2^n-2} + rx^{2^n-3} + \cdots = 0 \qquad (6.3)$$

che viene identificata con il prodotto dei fattori (6.2), ottenendo un sistema di $2^n - 1$ equazioni. Se da tale sistema si eliminano i vari coefficienti incogniti a, a_1, ecc., fuorché α, quest'ultimo risolverà un'equazione di grado $\begin{pmatrix} 2^n \\ 2^{n-1} \end{pmatrix}$ dove però compaiono solo le potenze pari di α e dunque riducibile ad un'equazione di grado *dispari* $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n \\ 2^{n-1} \end{pmatrix}$. Tale equazione ha termine noto *negativo* perché α è la somma di 2^{n-1} radici scelte tra le 2^n radici della (6.3) e pertanto può assumere $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n \\ 2^{n-1} \end{pmatrix}$ valori, esprimibili come funzioni razionali dei coefficienti della (6.3) che, mancando del secondo termine, ha la somma delle radici pari a zero. Dunque i valori di α si annullano a coppie. L'equazione per α ammette così una radice positiva almeno, in termini della quale si possono esprimere razionalmente i coefficienti delle (6.2). Procedendo nella scissione di ciascuna delle (6.2) in una coppia di equazioni di grado 2^{n-2} ed iterando il procedimento, si giungeva a scindere l'equazione (6.3) nel prodotto di equazioni di secondo grado a coefficienti reali ([9], pp. 312-313). Tuttavia, oltre all'utilizzo delle formule di Viète-Girard, Eulero non aveva sufficientemente motivato il fatto che l'equazione soddisfatta da α fosse di grado $2(2k+1)$, né era solidamente fondata l'asserzione che il termine noto di tale equazione fosse negativo.

Questi difetti furono notati da Daviet de Foncenex [17] (secondo Delambre, su suggerimento di Lagrange) e da Lagrange stesso [18]: entrambi però non eliminarono il tacito riferimento alle formule di Viète-Girard e dunque non sono valide. Si può aggiungere che anche Pierre-Simon de Laplace [19] presentò nel 1795 agli studenti dell'École Normale una dimostrazione algebrica del TFA che cade nella stessa trappola [20].

6.4 D'Alembert ed il TFA

Negli stessi anni in cui Eulero proponeva il primo tentativo di dimostrazione algebrica del TFA, Jean Le Ronde D'Alembert inaugurava la stagione delle dimostrazioni *analitiche* del TFA con una dimostrazione che a molti sembrò inattaccabile sotto il profilo del rigore ma che fu ugualmente criticata da Gauss. In realtà [1] D'Alembert aveva presentato nel 1745 all'Accademia delle Scienze di Parigi una memoria dal titolo *Recherches sur le calcul intégral* che concludeva un trittico di lavori circa l'integrazione in termini finiti dei differenziali di funzioni razionali fratte che inaugurarono un breve periodo di intensa ed originale produzione matematica [21] e dove D'Alembert propose una dimostrazione

del TFA in cui mostrava la chiusura del campo complesso sotto l'azione delle operazioni algebriche per mostrare che una funzione qualsiasi (*quelconque*) di $x + y\sqrt{-1}$ si esprimeva nella forma $p + q\sqrt{-1}$ deducendo che, se la radice di un'equazione algebrica assume tale forma, l'equazione deve anche essere risolta da $p - q\sqrt{-1}$ e perciò
Un'equazione le cui radici sono immaginarie si può fattorizzare in trinomi i cui coefficienti sono reali.[20] ([22], in [1], p. 113)

Questa dimostrazione è errata come quella di Eulero in quanto presupponte di poter esprimere le radici di un'equazione algebrica solo tramite il ricorso ad operazioni algebriche elementari.

D'Alembert, come altri matematici dell'epoca, opera una netta distinzione tra *quantità* immaginarie e *radici* immaginarie di un'equazione. Le quantità immaginarie sono funzioni esplicite di variabile complessa mentre le radici immaginarie di un'equazione sono le sue soluzioni non reali. La distinzione permise a D'Alembert di ottenere, nel 1746, una dimostrazione del TFA priva dei paralogismi che si riscontravano nelle opere dei matematici a lui precedenti o contemporanei. In alcune *Observations* datate 15 giugno 1752 D'Alembert si esprime in questi termini:

ho dimostrato

1° *che ogni quantità immaginaria di forma qualsiasi si può ridurre a $A + B\sqrt{-1}$, con A e B quantità reali.*

2° *che tutte le radici immaginarie di un'equazione qualsiasi si possono esprimere come $A + B\sqrt{-1}$, e che in questo caso ve ne è un'altra rappresentata da $A - B\sqrt{-1}$, da cui ho concluso che ogni quantità algebrica razionale o, se si vuole, ogni equazione è riducibile nel prodotto di trinomi reali [...]*

Per quanto riguarda la seconda proposizione, all'inizio si direbbe che si tratta di una conseguenza necessaria della prima ma perché sia così bisognerebbe dimostrare [...] che è sempre possibile supporre una forma immaginaria qualsiasi per una radice non reale; questa ipotesi può essere certo molto plausibile ma essa è allo stesso tempo molto difficile (e forse impossibile) da dimostrare con rigore. Ho dunque cercato un metodo diretto ed indipendente dalla forma che si può assegnare alle radici immaginarie delle equazioni. [21] (*cfr.* [1], p. 114).

[20] Une équation dont les racines sont imaginaires, peut se diviser en trinômes, dont les coefficients soient réels.

[21] j'ai démontré

1° que toute quantité imaginaire d'une forme quelconque peut se réduire à $A + B\sqrt{-1}$, A et B étant des quantités réelles.

2° que toutes racine imaginaire d'une équation quelconque pouvait s'exprimer par $A + B\sqrt{-1}$, et qu'en ce cas il y en avait une autre répresentés par $A - B\sqrt{-1}$,d'ou j'ai conclu que toute quantité algébrique rationnelle, ou si l'on veut toute équation était réductible en facteurs trinômes réelles [...]

A l'égard de la seconde proposition, il semble d'abord qu'elle soit une suite nécessaire de la première, mais il faudrait pour cela avoir démontré [...] que l'on peut toujours supposer une forme imaginaire quelconque à une racine non réelle; cette supposition peut être fort vraisemblable, mais elle est, en même temps fort difficile (et impossible peut-être) à demontrer rigouresement. J'ai donc cherché une méthode directe, et indépendante de la forme qu'on peut donner aux racines imaginaires des équations.

Come più volte è accaduto nella storia della matematica, un approccio che tagli i ponti con metodi che si sono rivelati infruttuosi conduce a nuovi risultati. Questo avvenne con la seconda dimostrazione del TFA, pubblicata nel 1748 tra le Memorie dell'accademia di Berlino per l'anno 1746 intitolata anch'essa *Recherches sur le calcul intégral.* Qui il TFA viene enunciato in questi termini

Sia $x^m + Ax^{m-1} + Bbx^{m-2} + ... + Fx + G$ un multinomio qualsiasi tale che non vi è alcuna quantità reale che, sostituita al posto di x, annulli tutti i termini. Affermo che vi sarà sempre una una quantità $p + q\sqrt{-1}$ da sostituire al posto di x e tale da rendere questo multinomio uguale a zero.[22] ([23] in [1], p. 114)

D'Alembert si riconduce a dimostrare che l'equazione

$$F(x, U) = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + Gx - U = 0 \tag{6.4}$$

a coefficienti reali ammette soluzione $x(U) \in \mathbb{C}$, qualunque sia la scelta di $U \in \mathbb{R}$, supponendo reali i coefficienti del polinomio. Le osservazioni iniziali di D'Alembert sono che per $U = 0$ si ha $x = 0$ e che $x(U)$ dipende con continuità con U. La sua dimostrazione si articola in due punti cruciali, il primo è un argomento locale, il secondo globale.

Il teorema di natura locale afferma che, se x ed U sono legati dall'equazione $F(x, U) = 0$ ed $F(0, 0) = 0$, allora vi è una soluzione $x(U)$ complessa per ogni scelta di $U \in \mathbb{R}$, sufficientemente piccolo. D'Alembert considera il caso di $U \in \mathbb{R}_+$, $U \ll 1$ ed assume lo sviluppo di $x(U)$ in serie di potenze frazionarie di U:

$$x = \alpha U^{\frac{m}{n}} + \beta U^{\frac{p}{q}} + \gamma U^{\frac{r}{s}} + \cdots \tag{6.5}$$

dove gli esponenti sono tutti positivi e $\frac{m}{n} < \frac{p}{q} < \frac{r}{s} < \cdots$. Inserito lo sviluppo (6.5) in (6.4) ed uguagliando i termini con lo stesso esponente, D'Alembert riesce a determinare un valore approssimato *reale* per $x(U)$, l'approssimazione diventando migliore quanti più termini si conservano nello sviluppo (6.5). Quando $U < 0$, $|U| \ll 1$, se non vi sono termini in (6.5) con esponenti a denominatore pari, $x(U)$ resta reale mentre se vi è un esponente a denominatore pari, allora $x(U)$ è della forma $a + b\sqrt{-1}$.

Questa parte della dimostrazione di D'Alembert fu criticata da Eulero, De Foncenex e Lagrange perché le affermazioni sulla sviluppabilità in serie della soluzione non sembravano sufficientemente motivate e per l'utilizzo di un metodo di approssimazioni successive. Eulero, scrivendo a D'Alembert il 29 dicembre 1746, è molto diplomatico:

Ho letto con tanto frutto quanto piacere il vostro ultimo lavoro con cui avete onorato la nostra Accademia. Il modo in cui voi dimostrate che ogni espressione $x^n + Ax^{n-1} + etc. = 0$ che non abbia radici reali deve averle della forma $p+q\sqrt{-1}$, e di conseguenza che essa deve avere un fattore della forma $xx + \alpha x + \beta$ mi

[22] Soit un multinôme quelconque $x^m + Ax^{m-1} + Bbx^{m-2} + ... + Fx + G$ tel qu'il n'y ait aucune quantité réelle qui étant substituée à la place de x y fasse évanouir tout les terms, je dis qu'il y aura toujours une quantité $p + q\sqrt{-1}$ à substituer à la place de x, et qui rendra ce multinôme égal à zéro.

soddisfa appieno; poiché però procede a partire da uno sviluppo in serie infinita, non so se tutti saranno convinti.

Nella memoria [15], Eulero appare un po' più ruvido quando, a proposito della scomposizione in fattori lineari e quadratici reali dichiara

Finora, per quanto ne so io, nessuno ha ancora dimostrato rigorosamente la verità di quest'idea. ([15], §7) [23]

Sulla stessa linea si porrà Gauss nel 1799 [16]. De Foncenex osservò che

Poiché il valore immaginario trovato con questo metodo non è che un'approssimazione, si potrà supporre che la quantità che si trascura, piccola quanto si vuole, non sia proprio quella che impedisce di esprimere l'incognita in termini di un espressione finita: [...] si arriva spesso ad una situazione in cui un termine trascurato nello sviluppo in serie, sia in realtà proprio quello che le fa cambiare natura.[24] ([17], in [21], p. 421).

L'atteggiamento di Lagrange non fu univoco. Se nel 1772, allorché si accinse a tentare una dimostrazione del TFA, dichiarava, a proposito della dimostrazione di D'Alembert:

Questa dimostrazione è molto ingegnosa e mi sembra non lasci nulla a desiderare per quanto riguarda la correttezza: tuttavia essa è indiretta, essendo dedotta da considerazioni su curve e serie infinite, ed inoltre essa fa naturalmente credere che si possa ottenere lo stesso obiettivo grazie ad un'analisi semplice, fondata unicamente sulla teoria delle equazioni.[25] ([18], p.489)

Nel *Traité* del 1798, nella Nota relativa al TFA, Lagrange è più critico quando afferma, riferendosi alla dimostrazione di D'Alembert

Questa dimostrazione è incompleta perché, benché in un'equazione a due incognite sia sempre possibile esprimere una delle incognite ricorrendo ad una serie di potenze ascendenti nell'altra incognita, può succedere che i coefficienti dei termini della serie dipendano essi stessi da equazioni che non hanno alcuna radice reale, ciò che introdurrà nella serie altri immaginari di natura diversa da quelli ottenuti sviluppando le potenze dell'incognita[26] ([24], pp. 216-217)

L'argomento di D'Alembert di natura globale mira ad eliminare l'ipotesi $|U| \ll 1$: se $F(x,U) = 0$ è l'equazione di una curva algebrica $x(U)$ nel pia-

[23] Cependant personne, à ce que je sache, n'a encore demontré assés rigoureusement la verité de ce sentiment.

[24] Puisque la valeur qu'il trouve par cette méthode n'étant qu'approchée, on pourrait soupçonner que la quantité que l'on néglige, quelque petite qu'elle soit, ne fút précisément celle qui empêcheroit qu'on ne pût exprimer l'inconnue par une expression finie: [...] il arrive souvent qu'un terme qu'on croyoit négliger dans une série, est cependant celui qui la fait changer de nature.

[25] Cette démonstration est très ingégneuse et ne laisse, ce me semble, rien à désirer du côté de l'exactitude: mais elle est indirecte, étant tirée de la considération des courbes et des suites infinies, et elle porte naturellement à croire qu'on peut arriver au même but par une analyse plus simple, fondée uniquement sur la théorie des équations.

[26] Cette démonstration est incomplète, car, quoique dans une équation à deux indèterminées on puisse toujours exprimer l'une des indéterminées par une série de puissances ascendantes de l'autre indéterminée, il peut arriver que les coefficients des termes de la série dependent eux mêmes déquations qui n'aient point de racines réelles, ce qui introduirait dans la série d'autres imaginaires que celles qui viennent des puisances de l'indeterminée.

no complesso, quando U descrive un segmento dell'asse reale, $x(U)$ può essere continuata assumendo solo valori reali o della forma $p + q\sqrt{-1}$.

Supponiamo, seguendo l'esposizione di Gigli [25], che U varî nell'intervallo $[r, s]$ quando x assume valori reali. Questo intervallo può sempre essere allargato, attribuendo eventualmente ad x valori complessi. Infatti, se esistesse $U^* > r$ o $U^* < s$ non raggiungibile da $U(x)$, allora nell'intervallo (s, U^*) dovrebbe esistere un massimo T di $U(x)$ e, tra U^* ed r, dovrebbe esistere un minimo che corrisponde al valore $p + q\sqrt{-1}$ di x. Se però si pone $x = p + q\sqrt{-1}$ in (6.4), si sviluppano i calcoli e si separano parte reale da parte immaginaria si ottengono due equazioni in U, p e q che, previa eliminazione, si possono riscrivere come due equazioni, una in U e p, l'altra in U e q. Ora, $U(x)$ assume valori nell'intervallo (s, T) o in (T, r) per valori reali di p e q e potrà assumere valori superiori a T (rispettivamente, inferiori) quando p e q sono numeri complessi. Si conclude dunque che, a patto di attribuire ad x valori complessi, U può assumere qualsiasi valore reale per cui esistono valori reali o complessi di x per i quali $U = 0$ e che dunque risolvono l'equazione algebrica.

Gauss criticò l'uso fatto di quantità infinitesime come anche il repentino passaggio al finito ma l' obiezione più seria, che egli però non evidenziò molto, è che il valore limite α delle ascisse che danno luogo a valori complessi dell'ordinata non è detto che produca esso stesso un'ordinata di questo tipo, benché Gauss conceda che sia così almeno per le funzioni algebriche. In mancanza della dimostrazione di questo fatto però Gauss afferma

Per questi motivi non posso ritenere soddisfacente la dimostrazione di D'Alembert. Ciononostante mi sembra che il vero punto nevralgico della dimostrazione possa essere messo al riparo da ogni obiezione.[27] [16]

6.5 La prima dimostrazione di Gauss

Nel corso della sua carriera Gauss propose quattro dimostrazioni del TFA benché l'ultima [26], pubblicata nel 1849, abbia molti tratti in comune con la prima, pubblicata nel 1799 quando Gauss era poco più che ventenne. In mezzo, nel 1816, si trovano due altre dimostrazioni: una—[27]—di natura algebrica, l'altra—[28]—analitica. In questa sezione esaminiamo la prima dimostrazione che poggia su argomenti geometrici ed è contenuta nei §§13-24 di [16]. Considerata l'equazione

$$X(x) := x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + Kx^2 + Lx + M = 0 \tag{6.6}$$

in cui i coefficienti sono *reali*, *oggi* possiamo dire che l'idea è quella di sostituire x con

$$x = r(\cos\varphi + i \sin\varphi), \tag{6.7}$$

in (6.6), separare parte reale e parte immaginaria ed ottenere due funzioni $T(r, \varphi)$ ed $U(r, \varphi)$ che debbono avere almeno uno zero in comune: il teorema si

[27] Propter has rationes demonstrationem D'Alembertianam pro satisfaciente habere nequeo. Attamen hoc non obstante verus demonstrationis nervus probandi per omnes obiectiones infringi mihi videtur.

ottiene abbassando ripetutamente il grado dell'equazione grazie alla radice così trovata. Come vedremo però Gauss evita di introdurre quantità immaginarie nella dimostrazione. Nel dettaglio, ecco come si snoda il suo ragionamento:

• [16], §13: si dimostra questo

Lemma I. Dato un numero naturale m qualsiasi, la funzione

$$x^m \sin\varphi - r^{m-1}x\sin m\varphi + r^m \sin(m-1)\varphi \tag{6.8}$$

è sempre divisibile per $x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2$.

Dim. Infatti, per $m = 1$ (6.8) si annulla e dunque è divisibile per qualsiasi fattore; per $m = 2$ si verifica che il quoziente è $\sin\varphi$, mentre nel caso generale il quoziente è

$$x^{m-2}\sin\varphi + rx^{m-3}\sin 2\varphi + r^2x^{m-4}\sin 3\varphi + \cdots + r^{m-2}\sin(m-1)\varphi,$$

come si verifica eseguendone il prodotto con $x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2$.

• [16], §14: si dimostra il seguente

Lemma II. Se la quantità r e l'angolo φ sono determinati in modo che valgano le equazioni

$$r^m\cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + Br^{m-2}\cos(m-2)\varphi + \cdots + Kr^2\cos 2\varphi + Lr\cos\varphi + M = 0 \tag{6.9}$$

e

$$r^m\sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + Br^{m-2}\sin(m-2)\varphi + \cdots + Kr^2\sin 2\varphi + Lr\sin\varphi = 0 \tag{6.10}$$

allora la funzione $X(x)$ in (6.6) sarà divisibile per il fattore di secondo grado $x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2$, quando $r\sin\varphi \neq 0$, mentre se $r\sin\varphi = 0$ $X(x)$ sarà divisibile per il fattore di primo grado $x - r\cos\varphi$.

Dim. Supponendo dapprima $r\sin\varphi \neq 0$, Gauss considera ciascun termine di (6.6), lo moltiplica per $r\sin\varphi$ ed aggiunge due quantità opportune in modo da ottenere espressioni di tipo (6.8). Per il lemma I tutte le seguenti quantità e quindi anche la loro somma, sono allora divisibili per $x^2 - 2rx\cos\varphi + r^2$:

$$\begin{array}{ccc}
rx^m\sin\varphi & -r^m x\sin m\varphi & r^{m+1}\sin(m-1)\varphi \\
Arx^{m-1}\sin\varphi & -Ar^{m-1}x\sin(m-1)\varphi & +Ar^m\sin(m-2)\varphi \\
Brx^{m-2}\sin\varphi & -Br^{m-2}x\sin(m-2)\varphi & +Br^{m-1}\sin(m-3)\varphi \\
etc. & & etc. \\
Krx^2\sin\varphi & -Kr^2x\sin 2\varphi & +Kr^2\sin\varphi \\
Lrx\sin\varphi & -Lrx\sin\varphi & * \\
Mr\sin\varphi & * & +Mr\sin(-\varphi)
\end{array}$$

Sommando ordinatamente colonna per colonna, si osserva che la somma della prima colonna equivale ad $r\sin\varphi X(x)$, la somma della seconda colonna si annulla in virtù di (6.10) mentre l'uguaglianza a zero della somma della terza colonna si ottiene moltiplicando (6.9) per $\sin\varphi$, (6.10) per $\cos\varphi$ e sottraendo il primo prodotto dal secondo. Resta dimostrato il lemma nel caso $r\sin\varphi \neq 0$. Se $r = 0$, da (6.9) segue $M = 0$ ed X è divisibile per $x = x - r\cos\varphi$. Se

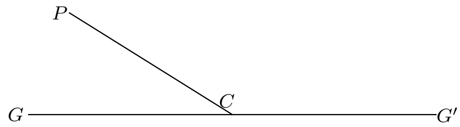

Figura 6.1: La posizione di un punto P del piano è individuata dalla sua distanza rispetto ad un'origine C e dall'angolo PCG contato positivamente in verso *orario*, con convenzione pertanto opposta a quella adottata oggi.

$\sin\varphi = 0$ allora $\cos\varphi = \pm 1$ e dunque $\cos n\varphi = (\cos\varphi)^n$ per cui la (6.9) si riduce a $X(r\cos\varphi) = 0$ e dunque X è divisibile per $x - r\cos\varphi$, completando la dimostrazione del lemma.

• [16], §15: Gauss osserva che il lemma II è stato già dimostrato da Eulero nella *Introductio in Analysin Infinitorum* (Tomo I, p.110) con il ricorso alle quantità immaginarie. Gauss ritiene un pregio della sua dimostrazione proprio l'aver evitato il ricorso agli immaginari. Ricordiamo ancora una volta che non era chiaro a tutti come le quantità immaginarie (cioè non reali) ottenibili come radici di equazioni algebriche venissero esaurite da quelli che oggi chiamiamo numeri complessi. Con i lemmi I e II Gauss riduce la dimostrazione del TFA a far vedere che, assegnata una funzione $X(x)$ data da (6.6), è sempre possibile determinare r e φ in modo che valgano (6.9) e (6.10).

• [16], §16: entra in scena l'argomentazione geometrica. Tracciata (6.1) la retta CG passante per un punto fisso C e fissata un'unità di misura, siano r e φ rispettivamente la distanza di un punto P da C e l'ampiezza dell'angolo $\angle GCP$[28]. Si tracci il segmento perpendicolare al piano contenente C e P, passante per P ed avente distanza (con segno) dal piano di riferimento

$$T(r,\varphi) = r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + \cdots + Lr\sin\varphi : \tag{6.11}$$

al variare di P nel piano, $T(r,\varphi)$ descrive una superficie che Gauss chiama *superficie prima* per distinguerla dalla *superficie seconda*

$$U(r,\varphi) = r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + \cdots + Lr\cos\varphi + M : \tag{6.12}$$

entrambe le superficie sono continue e, da qualche parte (*quaquaversum*), diventano infinite.

• [16], §17: si studiano le proprietà delle superficie prima e seconda. Si suppone di prendere r tanto grande da rendere trascurabili rispetto al primo tutti i termini di T ed U: per scelte opportune di φ è sempre possibile dare segni opposti al termini dominanti in T ed U che dunque taglieranno il piano (r,φ) lungo due curve di equazione $T = 0$ ed $U = 0$, rispettivamente. Queste curve vengono chiamate da Gauss la prima e la seconda curva e possono essere formate da più rami: ad esempio, la curva $T = 0$ ha come rami le semirette $\{\varphi = 0\} \cup \{\varphi = \pi\}$. Occorre ora dimostrare che queste curve hanno almeno un punto in comune.

[28]Osserviamo come l'origine degli angoli sia il semiasse orizzontale a *sinistra* dell'origine, con gli angoli contati positivamente in verso *orario*.

• [16], §18: entrambe le curve $T = 0$ ed $U = 0$, una volta espresse in coordiante cartesiane ortogonali ponendo $x = r\sin\varphi$ ed $y = r\cos\varphi$, sono algebriche di *ordine* m in quanto, qualunque sia l'intero n, valgono gli sviluppi

$$r^n \sin n\varphi = nx^{n-1}y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}y^3 + \frac{n\cdots(n-4)}{1\cdots 5}x^{n-5}y^5 - \cdots$$

e

$$r^n \cos n\varphi = x^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2 + \frac{n\cdots(n-3)}{1\cdots 4}x^{n-4}y^4 - \cdots$$

da cui si deduce che nello sviluppo di T ed U compaiono termini della forma $\alpha x^a y^b$ dove gli interi positivi a e b hanno somma al più n e che T ammette y come fattore. Il momento saliente dell'analisi (*maioris momenti investigatio*) è lo studio del comportamento asintotico delle due curve per grandi valori di r. Quando r è infinito, fattorizzato r^m, la curva $T(r,\varphi) = 0$ si riduce a

$$\sin m\varphi + \frac{A}{r}\sin(m-1)\varphi + \frac{B}{r^2}\sin(m-2)\varphi + \cdots = 0$$

e dunque si confonde (*confondetur*) per $r \gg 1$ con la curva di equazione $\sin m\varphi = 0$ formata da $2m$ semirette che si intersecano nell'origine C, individuate da

$$\varphi = \frac{k\pi}{m}, \qquad \text{con } k = 0, 1, \cdots 2m-1$$

e tagliano in $2m$ parti uguali la circonferenza di raggio infinitamente grande. Un'analisi simile condotta sulla curva $U = 0$ rivela che, per r infinito, essa si confonde con la curva $\cos m\varphi = 0$ che è ancora formata da $2m$ semirette di equazioni

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{2m}, \qquad \text{con } k = 0, \cdots 2m-1$$

che *bisecano* le semirette limite per la curva $T = 0$ (si veda la Fig. 6.2 costruita sull'esempio $x^3 + 1 = 0$, come in [29]).
Gauss conclude il paragrafo annunciando una dimostrazione dello stesso risultato che non coinvolga grandezze infinitamente grandi che possono urtare la sensibilità del lettore: *Siccome però le conclusioni sono di capitale importanza e le quantità infinitamente grandi possono urtare qualche lettore, mostrerò nell'articolo successivo come eliminarle così come togliere ogni aiuto derivante dagli infiniti.*[29] ([16], p.24).

• [16], §19: Gauss dimostra lo stesso risultato di prima senza il ricorso a quantità infinite:
Teorema: Fermo restando tutto come sopra, è possibile tracciare un cerchio di centro C sulla cui periferia vi siano $2m$ punti dove $T = 0$ insieme ad altrettanti punti nei quali $U = 0$ e disposti in modo che ciascun punto della seconda famiglia sia compreso tra due punti della prima famiglia.

[29]Quum vero conclusiones maximi momenti sint, quantitatesque infinite magnae quosdam lectores offendere possint: illas etiam absque infinitorum subsidio in art. sequ. eruere docebo

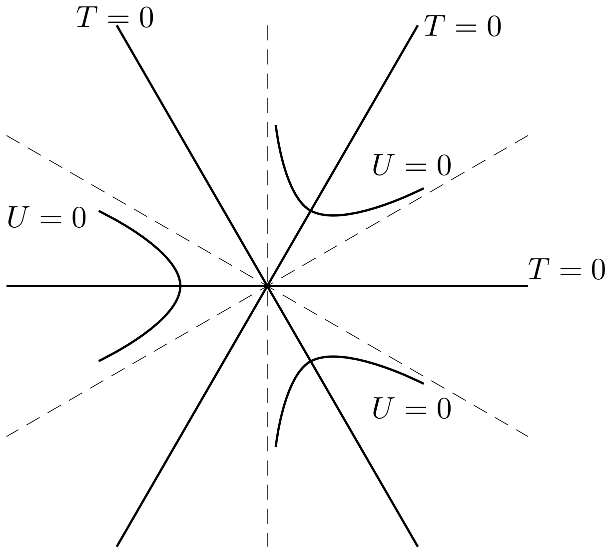

Figura 6.2: Le curve $U = 0$ e $T = 0$ costruite per l'equazione $x^3 + 1 = 0$ sono qui riportate: $T = 3x^2y - y^3$ si spezza in tre rette mentre $U = x^3 - 3xy^2 + 1 = 0$ ha per asintoti le rette tratteggiate. In [16] la figura tracciata corrisponde ad un'equazione di quarto grado.

Dim. Si ponga $S = |A| + |B| + \cdots + |K| + |L| + |M|$ e si scelga

$$R > \max\{S\sqrt{2}, 1\}. \tag{6.13}$$

Il cerchio di centro C e raggio R soddisfa le condizioni del teorema. Infatti, afferma Gauss, segnati sulla circonferenza i punti (1), (3),..., $(8m - 1)$ tali che

$$\varphi = \frac{45°}{m} \quad \varphi = 3\frac{45°}{m} \quad \varphi = 5\frac{45°}{m} \qquad \cdots \qquad \varphi = (8m-1)\frac{45°}{m},$$

cioè della forma $\varphi = \frac{\pi}{4m}(2k - 1)$, con $k = 1, \ldots, 4m$, si dimostra che tra i punti (1) e (3) esiste un unico punto dove $T = 0$ e similmente ne esiste uno solo compreso tra (3) e (5), e così via per un totale di $2m$ punti in cui $T = 0$. Gauss osserva, grazie a (6.11), che

$$T\left(R, \frac{45°}{m}\right) = R^{m-1}\left(\frac{R}{\sqrt{2}} + A\sin(m-1)\varphi + \frac{B}{R}\sin(m-2)\varphi + \cdots + \frac{L}{R^{m-2}}\sin\varphi\right)$$

e, per le limitazioni su R e la definizione di S

$$T\left(R, \frac{45°}{m}\right) \geq R^{m-1}\left(\frac{R}{\sqrt{2}} - |A| - |B| - \cdots - |L|\right) > 0$$

sicché nel punto (1) T è positiva. L'argomento si può in effetti ripetere fino al punto (3) perché nel muoversi da (1) a (3) $m\varphi \in (45°, 135°)$ dove $\sin m\varphi > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Allo stesso modo si conclude che $T > 0$ in tutti gli intervalli che conducono dal punto $(8k + 1)$ al punto $(8k + 3)$. Al contrario, poiché $\sin m\varphi < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ negli intervalli che portano dal punto $(8k+5)$ al punto $(8k+7)$ si conclude che lungo quest'arco T deve essere negativo. Poiché nel punto (3) $T > 0$ mentre in (5) si ha $T < 0$ occorre che T si annulli da qualche parte nell'intervallo tra (3) e (5): similmente deve esserci almeno uno zero tra (7) e (9), tra (11) e (13) e così via fino all'ultimo zero nell'intervallo tra $(8m - 1)$ ed (1) per cui vi sono almeno $2m$ punti della circonferenza descritta dove $T = 0$. Occorre ora provare che i punti in cui T si annulla sono esattamente $2m$. Poiché già si è visto che vi sono intervalli nei quali certamente non possono cadere soluzioni di $T = 0$, non resta che far vedere come in intervalli quali quello tra (3) e (5) non possa cadere più di una soluzione di $T = 0$. Se così non fosse ma vi fossero in tale intervallo almeno due soluzioni, dovrebbe esistere un punto nello stesso intervallo in cui T è massimo o minimo e dove dunque si avrebbe

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\varphi} = mR^{m-2}\left(R\cos m\varphi + \frac{m-1}{m}A\cos(m-1)\varphi + \cdots\right) = 0$$

ma dal momento che nell'intervallo tra (3) e (5) $\cos m\varphi$ *è sempre negativo e* $> \sqrt{\frac{1}{2}}$ (sic!), ovvero è $< -\sqrt{\frac{1}{2}}$ si conclude, con un argomento simile a quello già usato sopra, che $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\varphi} < 0$ in tutto l'intervallo considerato, rendendo impossibile l'esistenza di due o più zeri. Ripetendo le stesse considerazioni per $U(R, \varphi)$ si conclude che U è positiva in quelli compresi tra $(8k + 3)$ ed $(8k + 5)$ e negativa negli intervalli compresi tra i punti $(8k + 7)$ e $(8k + 9)$, da cui si ottengono esattamente $2m$ punti della circonferenza considerata nei quali U si annulla. A conclusione della dimostrazione Gauss osserva che il risultato secondo cui le radici di $T = 0$ od $U = 0$ sulla circonferenza $r = 0$ sono $2m$ si potrebbe dimostrare con il ricorso a considerazioni di geometria superiore (*geometria sublimiori*) osservando (teorema di Bézout) che una curva algebrica di ordine m non può essere intersecata da una curva algebrica di secondo ordine (come una circonferenza) in più che $2m$ punti. Gauss sembra dunque voler privilegiare un argomento di natura *elementare*.

- [16], §20: Gauss affronta il problema della dipendenza delle soluzioni di $T =$ ed $U = 0$ dal valore di R iniziando ad osservare che gli argomenti precedenti valgono per circonferenze di raggio r maggiore del valore di R dato dalla (6.13) ed anche per circonferenze di raggio minore, purché valga la limitazione $r > \max\{S\sqrt{2}, 1\}$ ed asserisce, senza dimostrazione (*perspicietur facile*), che queste soluzioni si spostano con continuità al variare di r. Da questa osservazione Gauss conclude che le circonferenze con raggio $r > \max\{S\sqrt{2}, 1\}$ sono tagliate trasversalmente (*secari*) da rami delle curve $T = 0$ ed $U = 0$ in modo che due rami successivi della curva $T = 0$ sono separati da un ramo della curva $U = 0$ e viceversa.
- [16], §21: Occorre ora dimostrare l'esistenza di almeno una radice comune a $T = 0$ ed $U = 0$. I punti di intersezione tra la circonferenza di raggio R ed i vari rami di $T = 0$ sono indicati con numeri pari: (0), (2),....,($2m$) mentre le intersezioni con $U = 0$ sono indicati con numeri dispari: (1), ...($2m - 1$). Gauss

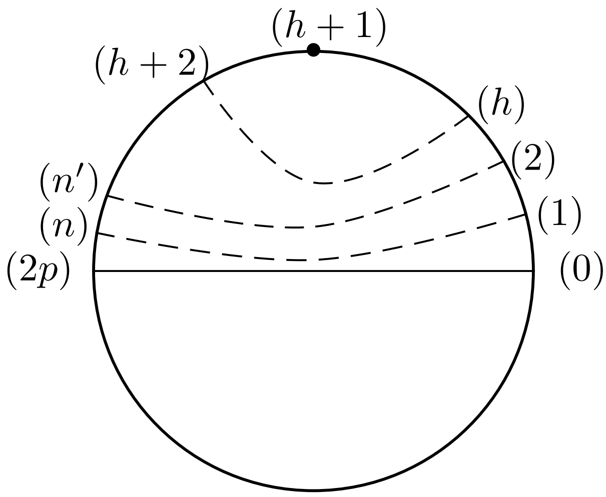

Figura 6.3: L'argomento per assurdo utilizzato da Gauss per mostrare che la prima e la seconda curva $T = 0$ ed $U = 0$ possiedono un'intersezione in comune.

ricorre ancora alle proprietà delle curve algebriche per asserire che un ramo di tali curve che non sia chiuso deve necessariamente estendersi all'infinito, visto che non può avere singolarità come la spirale logaritmica o la curva $y = 1/\log x$. Dunque i rami che entrano in una regione *finita* dovranno necessariamente uscirne. Questa conclusione, applicata ai rami di $T = 0$ ed $U = 0$ che si *separano* tra loro, permetterà di dedurre l'esistenza di un punto comune tra due rami di queste curve e dunque di dimostrare il TFA.

• [16], §22: Gauss suppone per assurdo che un ramo di $T = 0$ che congiunge dunque due punti *pari* non intersechi un ramo della curva $U = 0$ che connette due punti *dispari*. Poiché l'asse $\varphi = 0$ è un ramo della curva che unisce i punti (0) e $(2p)$, i punti di intersezione delle due curve $T(r, \varphi) = 0$ e $U(r'\varphi) = 0$ con la circonferenza $r = R$ che non giacciono al di sotto dell'asse x sono in numero *dispari*. Ora, il punto (1) dovrà connettersi con un altro punto dispari di indice $n < 2m$ e, in particolare, non potrà attraversare l'asse $\varphi = 0$ (Figura 6.3). Similmente (2) sarà unito ad un altro punto pari di indice $n' < n$ e così via finché si arriva ad un punto con indice h che dovrà collegare il punto di indice $(h + 2)$: questo ramo però dovrà essere tagliato necessariamente da quello che parte dall'ultimo punto rimasto, $(h + 1)$, contro l'ipotesi di partenza.

• [16], §23: Conclusa la dimostrazione geometrica del TFA, Gauss afferma che per brevità non dimostra come effettivamente i rami delle curve $T = 0$ ed $U = 0$ si intersechino. Egli osserva che si potrebbe anche condurre una dimostrazione analitica del teorema che però risulterebbe troppo astratta.

• [16], §24: in questo paragrafo conclusivo, Gauss stabilisce un parallelismo con la dimostrazione di D'Alembert per mostrare come l'essenza delle dimostrazioni sia la stessa. Non effettua una dimostrazione dell'equivalenza ma propone argomenti euristici stringenti a favore di quanto asserito.

Questa dunque la prima dimostrazione di Gauss che, per essere completamente rigorosa secondo le richieste *attuali*, dovrebbe giustificare alcuni punti circa il comportamento delle curve algebriche: questi dettagli tecnici sono stati forniti da Alexandre Ostrowski nel 1920: Gauss non sembra esserne preoccupato forse perché ha già intravisto modi diversi di dimostrare il teorema come asserisce in una nota a pie' di pagina di [16].

6.6 La terza dimostrazione di Gauss

Questa dimostrazione, contenuta in una breve nota trasmessa alla Società delle Scienze di Göttingen il 30 gennaio 1816, è la più breve ed apparve in coda alla seconda dimostrazione, di natura algebrica. La brevità di questa dimostrazione è tale che Gauss stesso dichiara di preferirla di gran lunga alla precedente quanto a semplicità: *e riguardo a semplicità sembra di gran lunga da preferire a quella.*[30] ([28], p. 59)

Si parte ancora da (6.6) con coefficienti reali, dunque e si costruiscono le funzioni

$$t(r,\varphi) := r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + \cdots + Lr\cos\varphi + M,$$

$$u(r,\varphi) := r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + \cdots + Lr\sin\varphi,$$

$$t'(r,\varphi) := mr^m \cos m\varphi + (m-1)Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + \cdots + Lr\cos\varphi$$

$$u'(r,\varphi) := mr^m \sin m\varphi + (m-1)Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + \cdots + Lr\sin\varphi,$$

$$t''(r,\varphi) := m^2r^m \cos m\varphi + (m-1)^2Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + \cdots + Lr\cos\varphi$$

$$u''(r,\varphi) := m^2r^m \sin m\varphi + (m-1)^2Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + \cdots + Lr\sin\varphi :$$

chiaramente si ha

$$t' = r\frac{\partial t}{\partial r},\quad t'' = r\frac{\partial t'}{\partial r}\qquad u' = r\frac{\partial u}{\partial r},\quad u'' = r\frac{\partial u'}{\partial r}.$$

Gauss definisce la funzione

$$y(r,\varphi) := \frac{(t^2+u^2)(tt''+uu'') + (tu'-ut')^2 - (tt'+uu')^2}{r(t^2+u^2)^2} \tag{6.14}$$

le cui singolarità possono derivare solo dall'annullamento simultaneo di t ed u dal momento che r è fattorizzabile al numeratore. Ora Gauss considera un valore R tale che

$$R > \max\{m|A|\sqrt{2}, \sqrt{m|B|\sqrt{2}}, \sqrt[3]{m|C|\sqrt{2}}, \sqrt[4]{m|D|\sqrt{2}}, \cdots\} > 0 \tag{6.15}$$

e dimostra che

$$(tt'+uu')(R,\varphi) > 0 \qquad \forall\varphi\in[0,2\pi)$$

[30] et respectu simplicitatis illi longissime praeferenda videtur.

Infatti, introdotte le funzioni

$$\begin{aligned}T(R,\varphi) &:= R^m \cos 45^\circ + AR^{m-1}\cos(45^\circ+\varphi) + BR^{m-2}\cos(45^\circ+2\varphi)+\\ &\quad\cdots + LR\cos(45^\circ+(m-1)\varphi) + M\cos(45^\circ+m\varphi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U(R,\varphi) &:= R^m \sin 45^\circ + AR^{m-1}\sin(45^\circ+\varphi) + BR^{m-2}\sin(45^\circ+2\varphi)+\\ &\quad\cdots + LR\sin(45^\circ+(m-1)\varphi) + M\sin(45^\circ+m\varphi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T'(R,\varphi) &:= mR^m \cos 45^\circ + (m-1)AR^{m-1}\cos(45^\circ+\varphi) + (m-2)BR^{m-2}\cos(45^\circ+2\varphi)+\\ &\quad\cdots + LR\cos(45^\circ+(m-1)\varphi) + M\cos(45^\circ+m\varphi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U'(R,\varphi) &:= mR^m \sin 45^\circ + (m-1)AR^{m-1}\sin(45^\circ+\varphi) + (m-2)BR^{m-2}\sin(45^\circ+2\varphi)+\\ &\quad\cdots + LR\sin(45^\circ+(m-1)\varphi) + M\sin(45^\circ+m\varphi),\end{aligned}$$

si osserva che, ad esempio, T si può riscrivere come

$$\begin{aligned}T(R,\varphi) &= \tfrac{R^{m-1}}{m\sqrt{2}}[R+mA\sqrt{2}\cos(45^\circ+\varphi)]\\ &+\tfrac{R^{m-2}}{m\sqrt{2}}[R^2+mB\sqrt{2}\cos(45^\circ+2\varphi)]\\ &+\tfrac{R^{m-3}}{m\sqrt{2}}[R^3+mC\sqrt{2}\cos(45^\circ+3\varphi)]\\ &+\tfrac{R^{m-4}}{m\sqrt{2}}[R^4+mD\sqrt{2}\cos(45^\circ+4\varphi)]\\ &+\text{etc.}\end{aligned}$$

dove si è osservato che

$$R^m = \frac{R^{m-1}}{m\sqrt{2}}[\overbrace{R+\cdots+R}^{\text{m volte}}].$$

I termini di ciascuna riga sono tutti positivi in virtù della restrizione (6.15): similmente è possibile concludere che $T'(R,\varphi)$, $U(R,\varphi)$ ed $U'(R,\varphi)$ sono positive per cui lo è anche la funzione $TT'+UU'$. Ora, posto $r=R$ nelle funzioni t, t', u ed u' si vede che

$$\begin{aligned}t(R,\varphi) &= T\cos(45^\circ+m\varphi)+U\sin(45^\circ+m\varphi)\\ u(R,\varphi) &= T\sin(45^\circ+m\varphi)-U\cos(45^\circ+m\varphi)\\ t'(R,\varphi) &= T'\cos(45^\circ+m\varphi)+U'\sin(45^\circ+m\varphi)\\ u'(R,\varphi) &= T'\sin(45^\circ+m\varphi)-U'\cos(45^\circ+m\varphi)\end{aligned}$$

da cui si conclude che $(tt'+uu')(R,\varphi)=TT'+UU'>0$. In modo analogo si può mostrare che $(t^2+u^2)(R,\varphi)=T^2+U^2>0$ e quindi per nessun valore di R che verifichi la (6.15) si può avere $t=0$ ed $u=0$ *simultaneamente*.

Dopo queste considerazioni generali, Gauss dimostra il teorema che equivale al TFA.

Teorema: esistono valori di $r\in[0,R]$ e $\varphi\in[0,360^\circ)$ per i quali si ha allo stesso tempo $t=0$ ed $u=0$.

Supponiamo falso il teorema per cui $t^2+u^2>0$ nel disco di raggio R considerato e dunque la funzione y definita in (6.14) è finita ovunque nel disco. Consideriamo allora l'integrale doppio

$$\int_0^R\int_0^{360^\circ} y\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

che deve avere un valore Ω finito. Per determinare Ω integriamo dapprima in φ e poi in r. Una derivazione rispetto a φ consente di verificare che

$$\int_0^{360^\circ} y\mathrm{d}\varphi = \left.\frac{tu' - ut'}{r(t^2+u^2)}\right|_0^{360^\circ} = 0 = \Omega.$$

D'altro canto una derivazione rispetto ad r conduce a

$$\int_0^R y\mathrm{d}r = \left.\frac{tt' + uu'}{(t^2+u^2)}\right|_0^R = \frac{TT' + UU'}{T^2+U^2} > 0$$

sicché, integrando in φ si otterrà un valore strettamente positivo di Ω, in contrasto a quanto ottenuto sopra. Dunque la funzione y non può essere finita dappertutto nel disco di raggio R e la divergenza può essere solo dovuta all'annullamento simultaneo di t ed u. Detti g e G i valori di r e φ che annullano sia t che u si osserva che, posto $x = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ la funzione X definita in (6.6) si trasforma in $t + \sqrt{-1}u$, mentre sostituendo $x = r(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)$ in X questa si riduce a $t - \sqrt{-1}u$. In particolare X si annulla sia in $x = g(\cos G + \sqrt{-1}\sin G)$ sia in $x = g(\cos G - \sqrt{-1}\sin G)$ e dunque risulterà divisibile sia per $x - g(\cos G + \sqrt{-1}\sin G)$ che per $x = g(\cos G - \sqrt{-1}\sin G)$, cioè per il trinomio $x^2 - 2g\cos Gx + g^2$ che si riduce al binomio $x \mp g$ qualora sia $\sin G = 0$ e $\cos G = \pm 1$ o $g = 0$. Notiamo come ora Gauss, a differenza della dimostrazione del 1799, utilizza liberamente la rappresentazione dei numeri complessi.

Bibliografia

[1] C. Gilain: Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre: théorie des équations et calcul integral. *Archives for the History of Exact Sciences* **42**, (1991), 91-137.

[2] K. Manders: Algebra in Roth, Faulhaber, and Descartes. *Historia Mathematica* **33**, (2006), 184-209.

[3] A. Girard: Invention Nouvelle en l'Algèbre, Blaeuw, Amsterdam, (1629). Ristampata a cura di D. Bierens de Haan, Leida, (1884).

[4] *The Geometry of René Descartes with a fac-simile of the first edition*, translated from the French and Latin by D.E. Smith and M.L. Latham, Dover, New York, (1954). Riproduzione dell'edizione del 1925 pubblicata da Open Court Publishers.

[5] I. Newton: *Arithmetica Universalis; sive de compositione et resolutionem arithmetica liber.* Lione, Verbeek, (1732).

[6] G.W. Leibniz: Specimen novum analyseo pro scientia infiniti circa summas et quadraturas. *Acta Eruditorum*, 210-219, (1702).

[7] J.-P. Tignol: *Galois' Theory of Algebraic Equations.* World Scientific, Singapore, (2001).

[8] R. Cotes: An account of the book intituled *Harmonia Mensurarum. Phil. Trans. R. Soc. London* **32**, (1722), 139-150.

[9] A. Agostini: Il teorema fondamentale dell'algebra. *Periodico di matematiche* **24**, (1922), 307-327.

[10] C. MacLaurin: *A Treatise of Fluxions.* II Vols., Edinburgh, (1742).

[11] C. MacLaurin: *A Treatise of Algebra.* London, (1748).

[12] L. Euler: De integratione aequationum differentialium altiorum graduum, (1743).

[13] G. Eneström: Der briefwechsel zwischen Leonhardt Euler und Johann I Bernoulli. *Bibliotheca Mathematica* **6**, (1905), 16-87.

[14] L. Euler: *Introductio in Analysin Infinitorum.* 2 voll. Lausanne: Bousquet (1748).

[15] L. Euler: Recherches sur les racines imaginaires des equations. Mém. Acad. Sciences Berlin, (1751), 222–288.

[16] C.F. Gauss: Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstadt, (1799). In *Carl Friedrich Gauss Werke*, vol. III, 1-30, (1866).

[17] Daviet de Foncenex: Réflexions sur les quantités imaginaires. *Miscellanea philosophica-mathematica Societatis privatae Taurinensis*, **1**, (1759) 113–146.

[18] J.-L. Lagrange: Sur la forme des racines imaginaires des équations. *Nouveaux Mémoires de l'Académe de Berlin*, (1772), 222-258. In *Œuvres*, vol. III, 479-516.

[19] P.-S. de Laplace: Leçons de mathématiques données a l'École normale en 1795. In *Œuvres*, vol. XIV, 10-177.

[20] G. Loria: Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche. *Rivista Matematica*, **1**, (1891), 185-248.

[21] C. Balthus: D'Alembert's proof of the fundamental theorem of algebra. *Historia Mathematica*, **31**, (2004), 414-428.

[22] J. le Rond d'Alembert: Recherches sur le calcul intégral. *Procès-verbaux de l'Académie royale des sciences de Paris*, (1745), 102–123.

[23] J. le Rond d'Alembert: Recherches sur le calcul intégral. *Mémoires l'Académie de Berlin*, (1746), 182–224.

[24] J.L. Lagrange: *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés, avec des notes sur pluiseurs points de la Théorie des équations algébriques*, Courcier, Paris, (1808). In *Œuvers Complètes*, vol. 3, J.A. Serret, Ed., Gauthier-Villars, Paris, (1869), 11-370.

[25] D. Gigli: Numeri complessi a due e a più unità. In Questioni riguardanti le matematiche elementari (curatore: F. Enriques). Parte I: Critica dei Principii, Vol. II. Zanichelli, Bologna, 133–270, (1925).

[26] C.F. Gauss: Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen. *Göttinger Abhandlungen* **4** (1850). In *Carl Friedrich Gauss Werke*, vol. III, 71–102, (1866).

[27] C.F. Gauss: Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. *Commentationes recentiores* **3**, Göttingen, (1816). In *Carl Friedrich Gauss Werke*, vol. III, 31–56, (1866).

[28] C.F. Gauss: Theorematis de resolubilitatem functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia. *Commentationes recentiores* **3**, Göttingen, (1816). In *Carl Friedrich Gauss Werke*, vol. III, 57-64, (1866).

[29] S. Maracchia: *Storia dell'Algebra.* Liguori, Napoli, (2005).