

Capitolo 2

Proprietà di inerzia

2.1 Richiami teorici

2.1.1 Centro di massa

Consideriamo un sistema \mathcal{M} formato da N punti materiali (P_i, m_i) .

Definizione 2.1 Il centro di massa G di \mathcal{M} è quel punto il cui vettore posizione rispetto ad un'origine $O \in \mathcal{E}$ è definito da

$$G - O := \frac{\sum_{i=1}^N m_i (P_i - O)}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i (P_i - O)}{M} \quad (2.1)$$

dove $M := \sum_{i=1}^N m_i$ è la massa totale di \mathcal{M} .

La localizzazione del centro di massa è facilitata in tutti quei casi in cui \mathcal{M} ammette delle *simmetrie materiali*. Infatti, è possibile dimostrare che se \mathcal{M} ammette una simmetria materiale rispetto ad un asse r ovvero rispetto ad un piano π , allora G si trova, rispettivamente, su r o su π .

Se un sistema \mathcal{M} è l'unione di due sottosistemi \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 disgiunti¹ ed indichiamo con G , G_1 e G_2 i centri di massa di \mathcal{M} , \mathcal{M}_1 ed \mathcal{M}_2 rispettivamente, allora vale la proprietà distributiva espressa da

$$M(G - O) = M_1(G_1 - O) + M_2(G_2 - O) \quad (2.2)$$

dove M_1 ed M_2 sono le masse di \mathcal{M}_1 ed \mathcal{M}_2 ed $M := M_1 + M_2$ è la massa di \mathcal{M} .

Quando il sistema \mathcal{M} , anziché essere formato da punti materiali, ha una struttura continua, la definizione di centro di massa deve essere cambiata sostituendo formalmente alla massa m_i il prodotto della densità (lineare, superficiale o volumetrica) di massa ϱ nel generico punto P di \mathcal{M} per l'elemento $d\mu$ di lunghezza, area o volume,

¹ O , più precisamente, la cui intersezione ha misura nulla.

rispettivamente; alla somma sui punti P_i l'integrale esteso su \mathcal{M} ed al vettore $P_i - O$ il vettore $P - O$:

$$G - O := \frac{1}{M} \int_{\mathcal{M}} \varrho(P)(P - O) d\mu \quad \text{con} \quad M := \int_{\mathcal{M}} d\mu. \quad (2.3)$$

La proprietà distributiva del centro di massa continua ad essere espressa dalla (2.2).

Per determinare la posizione del centro di massa di lamine o solidi omogenei, ottenuti per rotazione di un arco di curva o di una superficie attorno ad un asse che non le interseca, sono utili i seguenti teoremi di Pappo-Guldino.

Teorema 2.1 *Sia dato un arco di curva c ed una retta r che non taglia c in più parti (Figura 2.1.1a) e sia \mathcal{S} la superficie ottenuta per rotazione completa di c attorno ad r . La distanza y_C del centro di massa C di c da r è legata alla lunghezza $\ell(c)$ di c e all'area $a(\mathcal{S})$ di \mathcal{S} dalla formula*

$$a(\mathcal{S}) = 2\pi y_C \ell(c)$$

Teorema 2.2 *Sia data una superficie piana \mathcal{S} ed una retta r che non taglia \mathcal{S} in più parti (Figura 2.1.1b) e sia \mathcal{B} il solido ottenuto per rotazione completa di \mathcal{S} attorno ad r . La distanza y_C del centro di massa di \mathcal{S} da r è legata all'area $a(\mathcal{S})$ di \mathcal{S} e al volume $v(\mathcal{B})$ dalla formula*

$$v(\mathcal{B}) = 2\pi y_C a(\mathcal{S})$$



Figura 2.1: I teoremi di Pappo-Guldino servono a determinare la distanza del centro di massa C di una lamina a) o di un solido b) ottenuti per rotazione completa di una curva c o di una lamina \mathcal{S} , rispettivamente, attorno ad un asse r che non intersechi c o \mathcal{S} .

Consideriamo ad esempio una semicirconferenza di raggio R ed usiamo il primo teorema di PAPPO-GULDINO per calcolare la distanza del centro di massa dal diametro r (Figura 2.1.1a).



Figura 2.2: Applicazione dei teoremi di Pappo-Guldino all'individuazione della distanza dal diametro r del centro di massa C di una semicirconferenza a) o di un semidisco b).

In questo caso $\ell(c) = \pi R$ e $a(\mathcal{S}) = 4\pi R^2$ perché nella rotazione c genera una superficie sferica. Dunque,

$$y_C = \frac{2R}{\pi}. \quad (2.4)$$

Infine, usiamo il secondo teorema di PAPPO-GULDINO per calcolare la distanza del centro di massa di un semidisco di raggio R dal diametro r (Figura 2.1.1b). Ora $a(\mathcal{S}) = \frac{\pi R^2}{2}$, $v(\mathcal{B}) = \frac{4}{3}\pi R^3$ e dunque

$$y_C = \frac{4R}{3\pi}. \quad (2.5)$$

2.1.2 Tensori di inerzia

Sia O ancora un punto qualsiasi dello spazio euclideo tridimensionale \mathcal{E} .

Definizione 2.2 Il tensore di inerzia di \mathcal{M} rispetto al punto O è definito da

$$\mathbb{I}_O := \sum_{i=1}^N m_i [|P_i - O|^2 \mathbf{I} - (P_i - O) \otimes (P_i - O)]. \quad (2.6)$$

Quando O coincide con G , il tensore di inerzia \mathbb{I}_G è detto tensore *centrale* di inerzia.

Definizione 2.3 Sia r una retta passante per O , la cui direzione è individuata dal versore \mathbf{n} . Il momento di inerzia $I_r \equiv I_{O,\mathbf{n}}$ di \mathcal{M} rispetto ad r è lo scalare

$$I_{O,\mathbf{n}} := \mathbf{n} \cdot \mathbb{I}_O \mathbf{n} = \sum_{i=1}^N m_i d_i^2 \quad (2.7)$$

dove d_i è la distanza di P_i da r .

Osseviamo che, qualunque sia r e per ogni sistema di punti materiali \mathcal{M} che si consideri, essendo $d_i \geq 0$, si ha

$$I_{O,\mathbf{n}} \geq 0, \quad (2.8)$$

dove il segno di uguaglianza vale solo quando tutti i punti che compongono \mathcal{M} sono allineati lungo r .

Dalla definizione (2.2) segue che \mathbb{I}_O è simmetrico ($\mathbb{I}_O = \mathbb{I}_O^T$) per cui esiste una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, detta terna principale di inerzia di \mathcal{M} rispetto ad O , dello spazio delle traslazioni \mathcal{V} che lo diagonalizza:

$$\mathbb{I}_O = I_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + I_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + I_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 = \sum_{j=1}^3 I_j \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.9)$$

dove gli autovalori I_i sono detti momenti principali di inerzia. Gli autovettori $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sono detti *direzioni principali* di inerzia. La dicitura momenti principali di inerzia per indicare gli autovalori di \mathbb{I}_O è giustificata in quanto si ha

$$I_k = \mathbf{e}_k \cdot \mathbb{I}_O \mathbf{e}_k \quad k = 1, 2, 3.$$

Quando si prenda come punto O il centro di massa G di \mathcal{M} , i momenti principali di inerzia sono detti momenti *centrali* di inerzia. Come conseguenza della disuguaglianza (2.8), gli autovalori di \mathbb{I}_O non possono essere negativi e, se si eccettua il caso dei sistemi \mathcal{M} disposti lungo una retta r , in tutti gli altri casi tali autovalori sono strettamente positivi e dunque \mathbb{I}_O è un tensore *definito positivo*.

Come per il centro di massa, anche la determinazione degli autovettori di \mathbb{I}_O è più agevole quando \mathcal{M} è dotato di assi o piani di simmetria materiale passanti per O . Infatti, se r è un asse di simmetria materiale passante per O , allora esso è anche direzione principale di inerzia mentre se un piano π passante per O ha normale \mathbf{n} , allora quest'ultima è direzione principale di inerzia.

Nelle applicazioni è di grande importanza il seguente teorema, di Huygens e Steiner:

Teorema 2.3 *Sia G il centro di massa di \mathcal{M} ed O un punto qualsiasi di \mathcal{E} . Il legame tra \mathbb{I}_O e \mathbb{I}_G è*

$$\mathbb{I}_O = \mathbb{I}_G + Md^2(\mathbf{I} - \mathbf{e}_{GO} \otimes \mathbf{e}_{GO}), \quad (2.10)$$

dove M è la massa di \mathcal{M} , $d := |G - O|$ e $\mathbf{e} := \frac{G-O}{|G-O|}$ è il versore lungo la congiungente O con il centro di massa G . Preso un versore \mathbf{n} arbitrario si ha inoltre che

$$I_{O,\mathbf{n}} = I_{G,\mathbf{n}} + mh^2. \quad (2.11)$$

dove h è la distanza tra i due assi, uno passante per O , l'altro passante per G , entrambi diretti lungo \mathbf{n} .

Se si vuole trovare la *matrice* di inerzia associata ad un tensore di inerzia \mathbb{I}_O e fissata una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, noto il tensore centrale di inerzia \mathbb{I}_G di un

corpo rigido è sufficiente osservare che, posto $G - O = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$, grazie a (2.10) si ha

$$I_{ij} := \mathbf{e}_i \cdot \mathbb{I}_O \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbb{I}_G \mathbf{e}_j + M[d^2 \delta_{ij} - x_i x_j] \quad (2.12)$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker.

Osservazione. Nella formulazione del teorema di Huygens-Steiner (2.10), relativa ai tensori di inerzia, figura la distanza tra G ed O mentre nella formulazione (2.11), che si riferisce ai momenti di inerzia, figura la distanza tra gli *assi paralleli* diretti lungo \mathbf{n} e passanti per O e G .

In molti casi occorre considerare sistemi materiali \mathcal{M} *piani*, cioè appartenenti ad un unico piano π . È allora utile conoscere il seguente teorema degli *assi perpendicolari*.

Teorema 2.4 *Sia dato un sistema materiale \mathcal{M} i cui punti appartengono tutti ad uno stesso piano π , di normale \mathbf{n} , e sia O un punto qualsiasi di π . Allora, \mathbf{n} è direzione principale di inerzia per \mathbb{I}_O , corrispondente all'autovalore I_3 . Inoltre, detti I_1 ed I_2 i restanti autovalori di \mathbb{I}_O , associati a direzioni principali che giacciono in π , si ha*

$$I_3 = I_1 + I_2. \quad (2.13)$$

Se indichiamo con $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base che diagonalizza il tensore di inerzia \mathbb{I}_O di un sistema piano, con O punto nel piano stesso, e con $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_3\}$ un'altra base ortonormale, abbiamo a disposizione le due rappresentazioni

$$\mathbb{I}_O = I_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + I_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + I_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$$

e

$$\mathbb{I}_O = I_{xx} \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + I_{yy} \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + I_{xy} (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x) + I_3 \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$$

grazie alle quali è possibile dimostrare che l'angolo $\varphi \in [0, \pi]$ che l'autovettore \mathbf{e}_1 forma con \mathbf{e}_x soddisfa

$$\tan 2\varphi = \frac{2I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}} \quad \text{da cui} \quad \varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}} \quad (2.14)$$

mentre gli autovalori sono dati da

$$I_1 = \frac{I_3}{2} + \frac{I_{xy}}{\sin 2\varphi} \quad I_2 = \frac{I_3}{2} - \frac{I_{xy}}{\sin 2\varphi} \quad (2.15)$$

dove I_3 si può anche scrivere come $I_{xx} + I_{yy}$ ed è dunque disponibile dalla matrice *non* ancora diagonalizzata; la funzione $\sin 2\varphi$ si deduce da $\tan 2\varphi$ con la formula

$$\sin 2\varphi = \pm \frac{\tan 2\varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi}}$$

in cui il segno va deciso sulla base del quadrante di appartenenza dell'angolo 2φ .

Consideriamo nuovamente un sistema \mathcal{M} , unione di due sottosistemi \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 disgiunti ed indichiamo con $G_1, M_1; G_2, M_2; G, M = M_1 + M_2$ i centri di massa e le masse di $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ ed \mathcal{M} . Vale allora il seguente *teorema di composizione*, conseguenza del teorema di Huygens-Steiner.

Teorema 2.5 *Si ha:*

$$\mathbb{I}_G(\mathcal{M}) = \mathbb{I}_{G_1}(\mathcal{M}_1) + \mathbb{I}_{G_2}(\mathcal{M}_2) + \mu d_{12}^2(\mathbf{I} - \mathbf{e}_{12} \otimes \mathbf{e}_{12}), \quad (2.16)$$

dove $d_{12} := |G_1 - G_2|$, $\mathbf{e}_{12} := \frac{G_1 - G_2}{|G_1 - G_2|}$ è il versore associato alla congiungente in punti G_1 e G_2 e $\mu := \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$ è la massa ridotta di \mathcal{M} . Se \mathbf{n} è un versore qualsiasi si ha inoltre

$$I_{G,\mathbf{n}}(\mathcal{M}) = I_{G_1,\mathbf{n}}(\mathcal{M}_1) + I_{G_2,\mathbf{n}}(\mathcal{M}_2) + \mu h^2 \quad (2.17)$$

dove ora h è la distanza dei due assi paralleli passanti uno per G_1 , l'altro per G_2 , entrambi diretti lungo \mathbf{n} .

Anche per i tensori e momenti di inerzia di sistemi *continui* valgono le stesse regole formali utilizzate per i centri di massa per cui avremo

$$\mathbb{I}_O := \int_{\mathcal{M}} \varrho(P) [|P_O|^2 \mathbf{I} - (P - O) \otimes (P - O)] d\mu, \quad (2.18)$$

$$I_{O,\mathbf{n}} := \int_{\mathcal{M}} \varrho(P) d^2(P) d\mu \quad (2.19)$$

mentre le equazioni (2.10-2.17) si trasportano inalterate al caso di distribuzioni continue.

2.2 Calcolo di tensori centrali di inerzia

Esempio 2.1 *Determinare il tensore centrale di inerzia di un'asta omogenea di massa m , assimilata ad un segmento rettilineo di lunghezza ℓ (Fig. 2.2).*

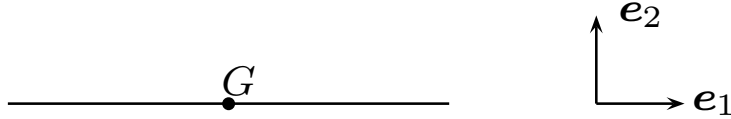


Figura 2.3: Asta omogenea rettilinea di massa m e lunghezza ℓ .

Consideriamo una base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, disponiamo l'asta AB parallelamente ad \mathbf{e}_1 e fissiamo l'origine G di un sistema di riferimento cartesiano nel punto medio di AB , che è anche il centro di massa dell'asta. Ogni direzione passante per G ed ortogonale ad \mathbf{e}_1 è asse di simmetria materiale e dunque deve essere un autovettore di \mathbb{I}_G . Poiché la distribuzione di massa dell'asta è la stessa rispetto a tutte queste direzioni, esse corrispondono ad un solo autovalore I_0 . Inoltre, \mathbf{e}_1 per il teorema spettrale è anch'esso autovettore di \mathbb{I}_G corrispondente all'autovalore 0, dal momento che l'asta è disposta lungo l'asse passante per G e diretto come \mathbf{e}_1 . Dobbiamo perciò avere

$$\mathbb{I}_G = I_0(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) = I_0(\mathbf{I} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1),$$

dove abbiamo usato la rappresentazione dell'identità. Per il calcolo di λ consideriamo la direzione \mathbf{e}_2 ed introduciamo l'ascissa $x \in [-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}]$ del generico punto P dell'asta. Usiamo l'equazione (2.19) con $d\mu = dx$, ed osserviamo che la distanza $d(P)$ è pari a $|x|$ mentre la densità lineare di massa costante ha valore $\rho = \frac{m}{\ell}$. Pertanto

$$\lambda = I_{G, \mathbf{e}_2} = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{m}{\ell} x^2 dx = \frac{m\ell^2}{12}$$

e dunque

$$\mathbb{I}_G = \frac{m\ell^2}{12} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) = \frac{m\ell^2}{12} (\mathbf{I} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1). \quad (2.20)$$

In forma matriciale, nella base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, abbiamo

$$I_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{12} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Osservazioni. Se consideriamo un versore \mathbf{n} che formi un angolo ϑ con la direzione \mathbf{e}_1 dell'asta, abbiamo

$$I_G \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbb{I}_G \mathbf{n} = \frac{m}{12} \ell^2 \sin^2 \vartheta \quad (2.22)$$

come valore del momento di inerzia lungo \mathbf{n} . Grazie alla (2.10), poiché per passare da G ad un estremo dell'asta ci si sposta di $\pm \frac{\ell}{2}$ nella direzione \mathbf{e}_1 , abbiamo subito

$$\mathbb{I}_B = \mathbb{I}_A = \frac{m\ell^2}{12} (\mathbf{I} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + \frac{m\ell^2}{4} (\mathbf{I} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = \frac{m\ell^2}{3} (\mathbf{I} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) \quad (2.23)$$

o, in forma matriciale,

$$I_B = I_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{3} \end{pmatrix}; \quad (2.24)$$

la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ diagonalizza anche il tensore di inerzia rispetto ad un estremo dell'asta e gli autovalori corrispondenti sono $(0, \frac{m\ell^2}{3}, \frac{m\ell^2}{3})$. Infine, il momento di inerzia rispetto all'asse passante per un estremo dell'asta e diretto come \mathbf{n} è

$$I_A \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbb{I}_A \mathbf{n} = \frac{m}{3} \ell^2 \sin^2 \vartheta. \quad (2.25)$$

Esempio 2.2 *Determinare il tensore centrale di inerzia di un anello omogeneo di massa m , assimilato ad una circonferenza di raggio R (2.2).*

Il centro di massa G coincide per simmetria con il centro della circonferenza \mathcal{C} che rappresenta l'anello. Introdotta la terna ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, con \mathbf{e}_3 ortogonale al piano contenente l'anello, dal teorema degli assi perpendicolari (2.4) sappiamo che

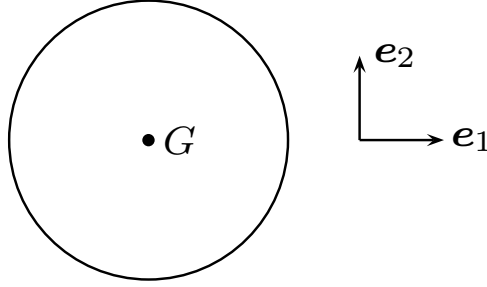


Figura 2.4: Anello omogeneo assimilato ad una circonferenza di massa m e raggio R .

\mathbf{e}_3 è autovettore di \mathbb{I}_G , con autovalore I_3 . Per simmetria materiale, tutte le direzioni passanti per G ed appartenenti al piano $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ contenente l'anello sono assi di simmetria materiale e dunque sono anche autovettori di \mathbb{I}_G che debbono corrispondere ad un solo autovalore I_0 che, per (2.13) è legato ad I_3 da $I_3 = 2I_0$. Abbiamo allora la rappresentazione

$$\mathbb{I}_G = I_0(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + 2I_0\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 = I_0(\mathbf{I} + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3).$$

Per trovare I_3 osserviamo che tutti i punti di \mathcal{C} hanno distanza costante pari ad R rispetto all'asse passante per G , diretto lungo \mathbf{e}_z per cui, da (2.19), abbiamo

$$I_3 = I_{G,\mathbf{e}_3} = 2I_0 = \int_{\mathcal{C}} \frac{m}{2\pi R} R^2 d\ell = mR^2$$

e quindi

$$\mathbb{I}_G = \frac{MR^2}{2}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + MR^2\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 = \frac{MR^2}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3). \quad (2.26)$$

o, in forma matriciale,

$$I_G = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Esempio 2.3 *Determinare il tensore centrale di inerzia di un rettangolo omogeneo di massa m e lati di lunghezza a e b .*

Siano $AB = a$ e $BC = b$ i due lati del rettangolo, disposti parallelamente agli assi \mathbf{e}_1 ed \mathbf{e}_2 , rispettivamente e poniamo l'origine del riferimento cartesiano nel centro di massa G del rettangolo che coincide con il suo centro di simmetria. Il punto P generico del rettangolo è descritto dalle coordinate $(x, y, 0)$, con $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ e $y \in [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]$. Gli assi passanti per G e diretti lungo \mathbf{e}_1 ed \mathbf{e}_2 sono assi di simmetria materiale e dunque sono autovettori di \mathbb{I}_G : indichiamo con I_x ed I_y i rispettivi autovalori. Infine, dal teorema

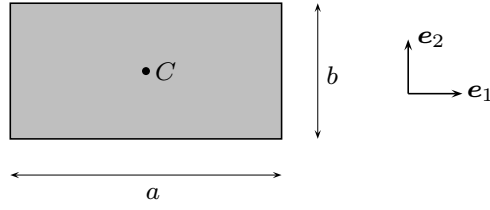


Figura 2.5: Rettangolo omogeneo di massa m e con i lati di lunghezza a , lungo \mathbf{e}_1 e b , lungo \mathbf{e}_2 .

(2.4) concludiamo che anche \mathbf{e}_z è autovettore di \mathbb{I}_G con autovalore $I_z = I_x + I_y$, grazie a (2.13). Pertanto abbiamo

$$\mathbb{I}_G = I_x \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + I_y \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + (I_x + I_y) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z.$$

Per determinare I_x serviamoci di (2.19), osservando che la densità *superficiale* di massa ρ ha valore costante $\frac{m}{ab}$ e che la distanza di $P \equiv (x, y)$ dall'asse passante per G e diretto lungo \mathbf{e}_x è $|y|$ per cui

$$I_x = I_G \cdot \mathbf{e}_x = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{m}{ab} y^2 dx dy = \frac{m}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy = \frac{mb^2}{12}.$$

Similmente si procede al calcolo di I_y osservando che ora $d(P) = |x|$ per cui

$$I_y = I_G \cdot \mathbf{e}_y = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{m}{ab} x^2 dx dy = \frac{m}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx = \frac{ma^2}{12}$$

sicché

$$\mathbb{I}_G = \frac{mb^2}{12} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{ma^2}{12} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \frac{m}{12} (a^2 + b^2) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (2.28)$$

o, in forma matriciale,

$$I_G = \begin{pmatrix} \frac{mb^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12} (a^2 + b^2) \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Osservazione. Ponendo $a = b = \ell$ nelle formule (2.28) e (2.29) otteniamo il tensore centrale di inerzia di un quadrato nella forma tensoriale

$$\mathbb{I}_G = \frac{m\ell^2}{12} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + \frac{m\ell^2}{6} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 = \frac{m\ell^2}{12} (\mathbf{I} + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3) \quad (2.30)$$

o in quella matriciale,

$$I_G = \begin{pmatrix} \frac{m\ell^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m\ell^2}{6} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Se invece si fa tendere a a 0, il rettangolo degenera in un segmento di lunghezza b disposto lungo \mathbf{e}_2 ed il tensore (2.28) coincide con quello di un'asta disposta lungo \mathbf{e}_2 , di lunghezza b . Viceversa, se $b \rightarrow 0$, (2.28) tende verso il tensore di inerzia di un'asta di lunghezza a , disposta lungo \mathbf{e}_1 .

Esempio 2.4 Determinare il tensore centrale di inerzia di un disco omogeneo di massa m e raggio R (Fig. 2.2).

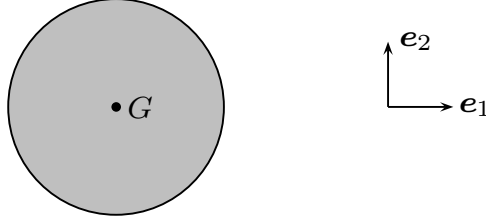


Figura 2.6: Disco omogeneo di massa m e raggio R .

Se il disco è posto nel piano $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ di normale \mathbf{e}_3 , allora tutte le direzioni del piano $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ passanti per il centro di massa G del disco sono assi di simmetria materiale e dunque corrispondono ad uno stesso autovalore I_0 di \mathbb{I}_G mentre, ancora per il teorema 2.4 e (2.13) anche \mathbf{e}_3 è autovettore di \mathbb{I}_G con autovalore $2I_0 = I_3$ per cui

$$\mathbb{I}_G = I_0(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + 2I_0\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 = I_0(\mathbf{I} + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3).$$

Con origine in G fissiamo le coordinate polari piane (ϱ, ϑ) , per cui i punti $P \equiv (\varrho, \vartheta)$ hanno coordinate $\varrho \in [0, R]$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$. Inoltre, la densità superficiale di massa ha valore costante $\frac{m}{\pi R^2}$, $d(P) = \varrho$ e $d\mu = \varrho d\varrho d\vartheta$ per cui

$$I_3 \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{m}{\pi R^2} \varrho^3 d\vartheta d\varrho = \frac{mR^2}{2}$$

e dunque

$$\mathbb{I}_G = \frac{mR^2}{4}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + \frac{mR^2}{2}\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 = \frac{mR^2}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3). \quad (2.32)$$

o, in forma matriciale,

$$I_G = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Osserviamo che, a parità di massa e di raggio, i momenti di inerzia di un disco sono *inferiori* rispetto ai corrispondenti momenti di inerzia per un anello. Ciò non

deve sorprendere in quanto un momento di inerzia rispetto ad un asse misura come è distribuita la massa attorno a quell'asse, facendo pesare di più i punti materiali più distanti dall'asse. È evidente allora nel caso della direzione \mathbf{e}_3 che il contributo dell'anello sia maggiore di quello del disco, dal momento che tutti i punti dell'anello hanno distanza R dall'asse diretto lungo \mathbf{e}_3 e passante per G , mentre quelli del disco hanno distanza *al più* R dallo stesso asse.

Esempio 2.5 *Determinare il tensore centrale di inerzia di un cilindro circolare retto di massa m , raggio di base R ed altezza h (Fig. 2.2).*

Il centro di massa G del cilindro è il punto medio del suo asse \mathbf{e}_3 e quest'ultimo è direzione di simmetria materiale per cui è autovettore di \mathbb{I}_G , con autovalore \mathbf{e}_z .

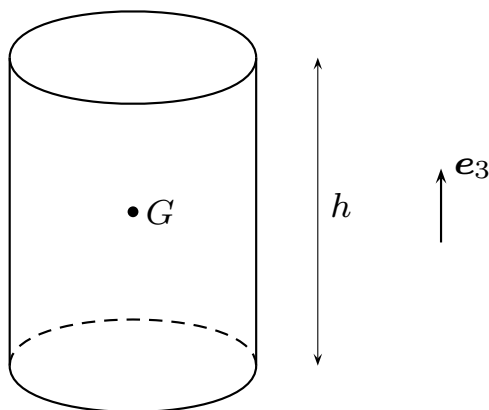


Figura 2.7: Cilindro circolare retto ed omogeneo di massa m e raggio R .

Ancora una volta, tutte le direzioni passanti per G che appartengono al piano $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ sono assi di simmetria materiale per cui \mathbb{I}_G ha due autovalori pari ad I_0 per cui

$$\mathbb{I}_G = I_0(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + I_z \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 :$$

poiché il cilindro non è piano, non possiamo più utilizzare una relazione tra gli autovalori, del tipo (2.13). Introduciamo un sistema di coordinate polari cilindriche centrato in G , con anomalia θ contata positivamente a partire da \mathbf{e}_x , in verso antiorario. I punti P del cilindro hanno coordinate (ϱ, θ, z) con $\varrho \in [0, R]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $z \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$. La densità di massa ha valore costante $\frac{m}{\pi R^2 h}$ e la distanza del generico punto P dall'asse \mathbf{e}_z passante per G è $d(P) = \varrho$ mentre $d\mu = \varrho d\varrho d\theta dz$ per cui

$$I_3 = \frac{m}{\pi R^2 h} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varrho^3 d\varrho d\theta dz = \frac{mR^2}{2}.$$

Un po' più laborioso è il calcolo di I_0 . Prendiamo come asse di riferimento e_x ed osserviamo che ora $d(P)$ è $d(P) = \sqrt{\varrho^2 \sin^2 \vartheta + z^2}$ per cui

$$I_0 = I_1 = \frac{m}{\pi R^2 h} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varrho (\varrho^2 \sin^2 \vartheta + z^2) d\varrho d\vartheta dz.$$

Siccome $\int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = \pi$ abbiamo ora

$$I_0 = I_x = \frac{mR^2}{4} + \frac{m}{\pi R^2 h} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varrho z^2 d\varrho d\vartheta dz = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$$

e quindi

$$\mathbb{I}_G = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + \frac{mR^2}{2} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \quad (2.34)$$

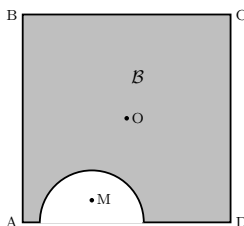
o, in forma matriciale,

$$I_G = \begin{pmatrix} m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Osserviamo che nel limite in cui $z \rightarrow 0$ (2.34) si riduca all'espressione (2.32) per il tensore centrale di inerzia di un disco, mentre quando $R \rightarrow 0$ (2.34) si riduce all'espressione (2.20) per un'asta.

2.3 Esercizi risolti

Esercizio 2.1 *Da un quadrato omogeneo di massa M e lato 3ℓ viene tolto un semidisco di raggio $\frac{3\ell}{4}$, con il centro posto sul lato AD , a distanza $x = \ell$ da A , ottenendo una lamina \mathcal{B} .*



Trovare le coordinate del centro di massa di \mathcal{B} rispetto al centro O del quadrato.

Grazie al teorema di PAPPO-GULDINO, la distanza di G da AD è $\frac{\ell}{\pi}$ e quindi il centro di massa M del semidisco ha coordinate $(-\frac{\ell}{2}, \frac{2-3\pi}{2\pi}\ell)$ rispetto al punto O . La massa m del semidisco asportato si ottiene osservando che esso è composto dello stesso

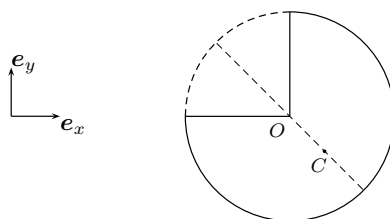
materiale del quadrato di partenza per cui la densità superficiale di massa calcolata a partire dal semidisco o dal quadrato deve dare sempre lo stesso valore:

$$\frac{32m}{9\pi\ell^2} = \frac{M}{9\ell^2},$$

da cui $m = \frac{M\pi}{32}$. Per trovare la posizione del del centro di massa G di \mathcal{B} possiamo immaginare che \mathcal{B} sia un quadrato privo del foro cui viene sovrapposto un semidisco di massa *negativa*, di modulo pari ad m . Questo procedimento è noto come *principio della lacuna*. Usando la (2.2) abbiamo

$$x_G = \frac{-mx_M}{M-m} = \frac{\pi\ell}{2(32-\pi)} \quad y_G = \frac{-my_M}{M-m} = \frac{\ell(3\pi-2)}{2(32-\pi)}.$$

Esercizio 2.2 Da un disco omogeneo di massa $2m$ e raggio $2R$ viene asportato un quadrante, ottenendo un corpo \mathcal{B} . Calcolare il momento centrale di inerzia I_{C,e_z} di \mathcal{B}



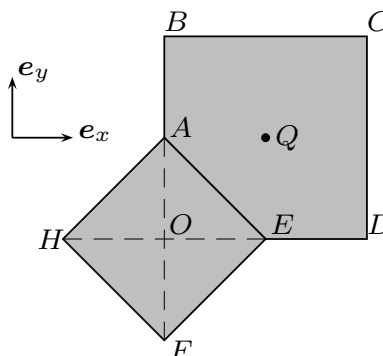
nella direzione ortogonale al suo piano.

Ogni quadrante che compone il disco di partenza possiede, per simmetria, lo stesso momento di inerzia rispetto all'asse passante per O , diretto come e_z e dunque il momento di inerzia I_{O,e_z} di \mathcal{B} è $I_{O,e_z} = \frac{3}{4}4mR^2 = 3mR^2$, dove $4mR^2$ è il momento di inerzia, rispetto allo stesso asse, del disco originario. Sempre per simmetria materiale, il centro di massa C di \mathcal{B} ha coordinate, (x_C, y_C) rispetto ad O tali che

$$|x_C| = |y_C| = \frac{8R}{9\pi}$$

per cui $|C - O|^2 = \frac{128R^2}{81\pi^2}$. Dal teorema di HUYGENS-STEINER, infine, ricaviamo

$$I_{C,e_z} = I_{O,e_z} - \frac{3m}{2}|C - O|^2 = \frac{81\pi^2 - 64}{27\pi^2}mR^2.$$



Esercizio 2.3 Il poligono $ABCDE$ è stato ottenuto asportando il triangolo rettangolo isoscele OAE di lato l dalla lamina quadrata omogenea $OBCD$ di lato $2l$ e massa $2m$. Una seconda lamina quadrata $AEFH$ di lato $l\sqrt{2}$ e massa $\frac{m}{4}$ è saldata al poligono lungo il lato AE , come indicato in figura. Determinare il momento di inerzia della lamina complessiva rispetto ad un asse passante per il punto Q di incontro delle diagonali di $OBCD$, ortogonale al piano della figura.

Siano $I_Q(OBCD)$ il contributo al momento di inerzia del quadrato $OBCD$, $I_Q(HAEF)$ il contributo del quadrato $HAEF$ e $I_Q(OAE)$ il contributo del triangolo OAE al momento di inerzia I_Q . Dal principio della lacuna abbiamo

$$I_Q = I_Q(OBCD) + I_Q(HAEF) - I_Q(OAE).$$

Esaminiamo separatamente i tre contributi. Poiché Q è il centro di massa di $OBCD$ abbiamo

$$I_Q(OBCD) = \frac{4}{3}m\ell^2.$$

Con l'ausilio del teorema di Huygens-Steiner otteniamo

$$I_Q(HAEF) = \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m}{2}\ell^2 = \frac{7}{12}m\ell^2,$$

dove il primo addendo si riferisce al momento centrale di inerzia, calcolato cioè rispetto ad O . Per il calcolo di $I_Q(OAE)$ osserviamo anzitutto che, per simmetria materiale,

$$I_O(OAE) = \frac{1}{2}m\ell^2$$

dove abbiamo osservato che OAE è equivalente ai fini del calcolo del momento di inerzia lungo l'asse e_z passante per O alla quarta parte di un quadrato congruente ad $HAEF$ e massa pari ad m , cioè il quadruplo della massa di OAE . Detto G il centro di massa di OAE , se applichiamo due volte il teorema di Huygens-Steiner, prima prendendo come punto di riferimento diverso da G il punto O e poi il punto Q arriviamo a

$$I_Q(OAE) = I_O(OAE) + \frac{m}{4}[|Q - G|^2 - |O - G|^2].$$

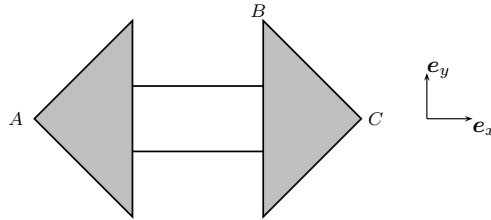
Se ricordiamo che G divide la mediana di AE di lunghezza $\ell\sqrt{2}$ in due parti, con $G - O = \frac{\sqrt{2}}{3}\ell$ ed osservando che $|G - Q| = |Q - O| = |G - O| = \frac{2}{3}\ell\sqrt{2}$ abbiamo

$$I_Q(OAE) = \frac{1}{2}m\ell^2 + \frac{m}{6}\ell^2 = \frac{2}{3}m\ell^2$$

e dunque

$$I_Q = \frac{4}{3}m\ell^2 + \frac{7}{12}m\ell^2 - \frac{2}{3}m\ell^2 = \frac{5}{4}m\ell^2.$$

Esercizio 2.4 Due aste omogenee, ciascuna di massa m e lunghezza 2ℓ , sono disposte su rette parallele a distanza ℓ tra loro ed hanno gli estremi saldati alle ipotenuse di due triangoli rettangoli isosceli di ugual massa $3m$. Tali ipotenuse sono lunghe 3ℓ ed hanno in comune l'asse con la bisettrice della striscia delimitata dalle aste, come indicato in figura. Determinare i momenti centrali di inerzia dell'intero sistema nelle



direzioni e_x ed e_y .

Il momento di inerzia I_{G,e_x} consta di tre termini: ogni asta, grazie al teorema di Huygens-Steiner, dà un contributo pari a $m\frac{\ell^2}{4}$; i triangoli equivalgono ad un quadrato di massa $6m$ e lato $\frac{3}{\sqrt{2}}\ell$ per cui il loro contributo vale $\frac{9}{4}m\ell^2$ cosicché il momento di inerzia complessivo in questa direzione è $\frac{11}{4}m\ell^2$. Passando al momento I_{G,e_y} , si osservi che ciascuna asta contribuisce con $\frac{1}{3}m\ell^2$ mentre il contributo di ogni triangolo richiede un po' di attenzione. Concentriamoci sul triangolo di vertice A : per simmetria il contributo dell'altro triangolo è il medesimo. Sia M il centro di massa del triangolo che si trova sull'altezza relativa all'ipotenusa a distanza ℓ da A . Sia O il punto medio dell'ipotenusa. Applicando due volte il teorema di Huygens-Steiner otteniamo

$$I_{G,e_y}(\mathcal{T}) = I_{M,e_y}(\mathcal{T}) + \frac{27}{4}m\ell^2 \quad \text{e} \quad I_{O,e_y}(\mathcal{T}) = I_{M,e_y}(\mathcal{T}) + \frac{3}{4}m\ell^2.$$

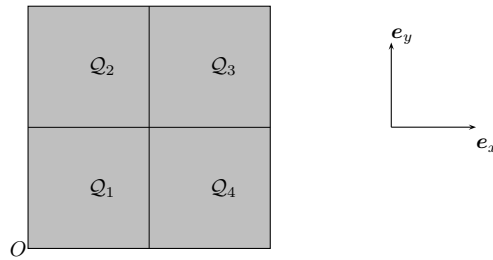
Ora, $I_{O,e_y}(\mathcal{T})$ è la metà del momento centrale di inerzia di un quadrato di massa doppia del triangolo e lato pari ad un suo cateto, e dunque vale $\frac{9}{8}m\ell^2$. Pertanto, svolgendo i calcoli si ottiene

$$I_{G,e_y}(\mathcal{T}) = \frac{57}{8}m\ell^2$$

ed il momento centrale di inerzia complessivo è

$$I_{G, \mathbf{e}_y} = \frac{2}{3}m\ell^2 + \frac{57}{8}m\ell^2 = \frac{179}{12}m\ell^2.$$

Esercizio 2.5 Una lamina piana \mathcal{L} è formata da quattro quadrati \mathcal{Q}_1 , \mathcal{Q}_2 , \mathcal{Q}_3 e \mathcal{Q}_4 ciascuno di lato ℓ e di masse m , $2m$, $3m$ e $4m$, rispettivamente, disposti come in figura. Determinare gli elementi della matrice di inerzia della lamina rispetto al vertice O .



Il tensore di inerzia di \mathcal{L} rispetto ad O è dato da

$$\mathbb{I}_O(\mathcal{L}) = \mathbb{I}_O(\mathcal{Q}_1) + \mathbb{I}_O(\mathcal{Q}_2) + \mathbb{I}_O(\mathcal{Q}_3) + \mathbb{I}_O(\mathcal{Q}_4)$$

gli elementi di matrice richiesti si possono ottenere dalla formula (2.12), applicata ai quattro quadrati. Se indichiamo con G_i il centro di massa del quadrato \mathcal{Q}_i , abbiamo

$$\mathbb{I}_{G_1}(\mathcal{Q}_1) = \frac{m\ell^2}{12}(\mathbf{I} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) \quad \text{e} \quad G_1 - O = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y),$$

$$\mathbb{I}_{G_2}(\mathcal{Q}_2) = \frac{m\ell^2}{6}(\mathbf{I} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) \quad \text{e} \quad G_2 - O = \frac{1}{2}\ell(\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y),$$

$$\mathbb{I}_{G_3}(\mathcal{Q}_3) = \frac{m\ell^2}{4}(\mathbf{I} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) \quad \text{e} \quad G_3 - O = \frac{3\sqrt{2}}{2}\ell(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y),$$

$$\mathbb{I}_{G_4}(\mathcal{Q}_4) = \frac{m\ell^2}{3}(\mathbf{I} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) \quad \text{e} \quad G_4 - O = \frac{1}{2}\ell(3\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y).$$

Confrontando queste espressioni con la formula generale (2.12) vediamo che i tensori centrali di inerzia contribuiscono solo agli elementi diagonali della matrice di inerzia in O che si ottengono con un calcolo diretto:

$$I_{xx} = \mathbf{e}_x \cdot \mathbb{I}(\mathcal{L})\mathbf{e}_x = \frac{40}{3}m\ell^2, \quad I_{yy} = \frac{52}{3}m\ell^2, \quad I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} = \frac{92}{3}m\ell^2.$$

Trattandosi di un sistema piano, l'unico elemento fuori diagonale è $I_{xy} = I_{yx}$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\frac{23}{2}m\ell^2 \quad I_{xz} = I_{zx} = I_{yz} = I_{zy} = 0.$$

Grazie alla costruzione di Mohr sappiamo che l'angolo φ formato dall'autovettore \mathbf{e}_1 di $\mathbb{I}_O(\mathcal{L})$ con l'asse \mathbf{e}_x soddisfa la relazione

$$\tan 2\varphi = \frac{2I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}} = \frac{23}{4}$$

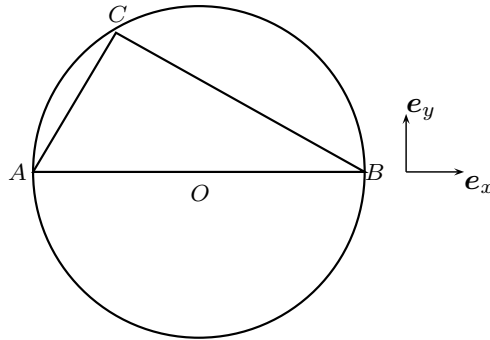
mentre gli autovalori di $\mathbb{I}_O(\mathcal{L})$ sono dati da

$$I_1 = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xy}}{\sin 2\varphi} = \frac{46}{3} - \frac{\sqrt{545}}{2}$$

e

$$I_2 = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \frac{I_{xy}}{\sin 2\varphi} = \frac{46}{3} + \frac{\sqrt{545}}{2}.$$

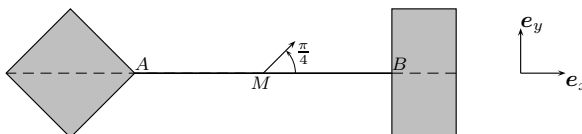
Esercizio 2.6 *Un corpo rigido piano è formato da un anello omogeneo di massa $2m$ e raggio R e da tre aste: AB , di massa m e lunghezza $2R$ disposta lungo un diametro dell'anello, AC di massa $2m$ e lunghezza R e BC , di massa m e lunghezza $R\sqrt{3}$ disposte in modo da avere il vertice comune C coincidente con un punto dell'anello. Determinare il momento di inerzia del corpo rispetto ad un asse passante per il punto O e diretto lungo \mathbf{e}_y .*



Osserviamo che la direzione \mathbf{e}_y è autovettore per il tensore centrale di inerzia sia di AB che dell'anello con momenti di inerzia, rispettivamente, $\frac{1}{3}mR^2$ ed mR^2 . Qualche accortezza in più occorre adottare nel calcolo del momento di inerzia relativo ad AC e CB , dove occorre notare che la distanza tra le rette dirette lungo \mathbf{e}_y , una passante per O e l'altra passante per il punto medio di AC è $3R/4$ mentre quella tra le rette dirette lungo \mathbf{e}_y , una passante per O e l'altra passante per il punto medio di BC è $R/4$. Applicando il teorema di Huygens-Steiner, si ottiene

$$I_{O, \mathbf{e}_y} = mR^2 \left(\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{24} + \frac{9}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} \right) = \frac{35}{16}mR^2.$$

Esercizio 2.7 Un corpo rigido piano è formato da un'asta AB di lunghezza 16ℓ e massa $m/2$, da un quadrato di massa m e lato $4\ell\sqrt{2}$ e da un rettangolo di massa $m/4$ e lati 4ℓ e 8ℓ disposti come in figura, con un vertice del quadrato saldato in A ed una sua diagonale sul prolungamento di AB e con il lato maggiore del rettangolo ortogonale ad AB e punto medio coincidente con B . Determinare per il sistema il momento di inerzia rispetto all'asse passante per il punto medio di AB , nella direzione \mathbf{n} inclinata di $\frac{\pi}{4}$ rispetto ad AB .



Calcoliamo separatamente i contributi dell'asta, del rettangolo e del quadrato al momento di inerzia richiesto. Per quanto riguarda l'asta, indicato con M il suo punto medio, poiché \mathbf{n} forma un angolo di $\pi/4$ con l'asta stessa, abbiamo

$$I_{M,\mathbf{n}}^{(AB)} = \frac{1}{12} \frac{m}{2} 256\ell^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{16}{3} m\ell^2.$$

Per il rettangolo, osserviamo anzitutto che il suo centro di massa dista 10ℓ dal punto medio dell'asta per cui i due assi paralleli ad \mathbf{n} , uno passante per il centro di massa del rettangolo, l'altro per M , distano $d = 5\sqrt{2}$. Dai dati del problema sappiamo che il tensore centrale di inerzia del rettangolo è

$$\mathbb{I}^{(R)} = \frac{m\ell^2}{3} [4\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + 5\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z]$$

per cui, essendo $\mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$, abbiamo che il momento centrale di inerzia del rettangolo lungo \mathbf{n} vale $\frac{5}{6}m\ell^2$ e dunque, grazie al teorema di Huygens-Steiner, il contributo al momento richiesto è

$$I_{M,\mathbf{n}}^{(R)} = m\ell^2 \left(\frac{5}{6} + \frac{25}{2} \right) = \frac{40}{3} m\ell^2.$$

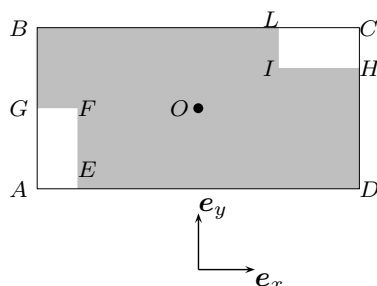
Siccome il momento centrale di inerzia del quadrato rispetto ad una direzione che, come \mathbf{n} , che giace nel piano di appartenenza del quadrato è $\frac{8m\ell}{3}$, mentre la distanza dei due assi paralleli ad \mathbf{n} , uno passante per M , l'altro per il centro di massa del quadrato, è $d = 6\sqrt{2}\ell$, abbiamo

$$I_{M,\mathbf{n}}^{(Q)} = m\ell^2 \left(\frac{8}{3} + 72 \right) = \frac{224}{3} m\ell^2 :$$

sommando i tre contributi ottenuti otteniamo

$$I_{M,\mathbf{n}} = \frac{280}{3} m\ell^2.$$

Esercizio 2.8 Da una lamina rettangolare omogenea $ABCD$ di massa $3m$ e lati $AB = 2\ell$ e $BC = 6\ell$ vengono asportati due rettangoli congruenti $AEFG$ e $CHIL$ di lati $AE = CH = \frac{\ell}{2}$ e $AG = CL = \ell$. Detto O il centro di massa di $ABCD$



determinare il momento di inerzia della lamina complessiva rispetto all'asse passante per O , diretto lungo e_x .

È sufficiente sottrarre al momento centrale di inerzia per il rettangolo intero i contributi dei due rettangoli $AEFG$ ed $IHCL$ utilizzando il teorema di Huygens-Steiner. Osserviamo che la massa di ciascuno dei rettangoli asportati è pari ad $m/8$ per cui

$$I_{O,e_x}(ABCD) = m\ell^2,$$

mentre

$$I_{O,e_x}(AEFG) = \frac{m\ell^2}{96} + \frac{m\ell^2}{32} = \frac{m\ell^2}{24}$$

ed

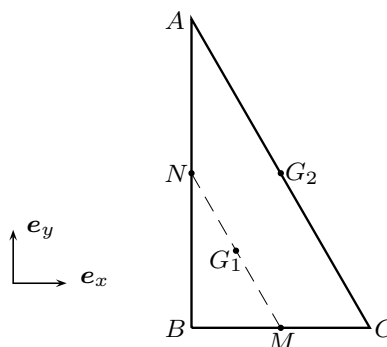
$$I_{O,e_x}(IHCL) = \frac{m\ell^2}{384} + \frac{9m\ell^2}{128} = \frac{7m\ell^2}{96}$$

e quindi

$$I_{O,e_x}(\text{tot}) = I_{O,e_x}(ABCD) - I_{O,e_x}(AEFG) - I_{O,e_x}(IHCL) = \frac{85}{96}m\ell^2.$$

Esercizio 2.9 Tre aste omogenee sono saldate in modo da formare un triangolo rettangolo, come indicato in Figura. L'asta AB ha lunghezza $2\ell\sqrt{3}$ e massa $2m$, l'asta BC ha lunghezza 2ℓ e massa $2m$ e l'asta AC ha lunghezza 4ℓ e massa $4m$. Trovare il momento centrale di inerzia del profilo triangolare ABC rispetto alla direzione e_z , ortogonale al piano che lo contiene.

Conosciamo le proprietà di inerzia delle tre aste separatamente e possiamo applicare il teorema di composizione due volte: la prima, alle aste AB e BC , la seconda al sistema formato da BC e dall'unione delle aste AB e BC . Nel primo caso, è sufficiente



applicare l'equazione (2.17) osservando che la distanza tra i centri di massa di AB e BC è metà della lunghezza dell'ipotenusa, cioè 2ℓ . Inoltre, la massa ridotta delle due aste è m per cui

$$I_{G_1, \mathbf{e}_z}^{(AB \cup BC)} = 2m\ell^2 + \frac{2}{3}m\ell^2 + 4m\ell^2 = \frac{20}{3}m\ell^2,$$

dove G_1 indica il centro di massa delle due aste ed i primi due addendi sono i contributi dei momenti centrali di inerzia di AB e BC , rispettivamente. A questo punto riappliciamo il teorema di composizione al sistema formato dall'ipotenusa e dall'unione dei due cateti AB e BC . Il momento centrale di inerzia richiesto è

$$I_{G, \mathbf{e}_z}^{(ABC)} = I_{G_1, \mathbf{e}_z}^{(AB \cup BC)} + I_{G_2, \mathbf{e}_z}^{(AC)} + \mu^* |G_1 - G_2|^2$$

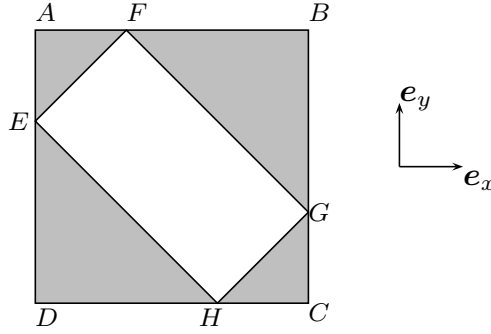
dove G indica il centro di massa dell'intero telaio, mentre G_2 è il centro di massa dell'ipotenusa AC . Per il calcolo della massa ridotta, occorre osservare che $AB \cup BC$ ha massa $4m$, per cui $\mu^* = 2m$. In fine, G_2 è il punto medio di AC mentre G_1 è il punto medio della congiungente i centri di massa M ed N di BC ed AB , rispettivamente, dal momento che queste aste hanno ugual massa. Ora, dalla geometria del problema, A , M , G_2 ed N sono i vertici di un rettangolo di cui G_1 è il punto centrale per cui $|G_1 - G_2| = \ell$ e dunque

$$I_{G, \mathbf{e}_z}^{(ABC)} = \frac{20}{3}m\ell^2 + \frac{16}{3}m\ell^2 + 2m\ell^2 = 14m\ell^2.$$

Esercizio 2.10 *Da una lamina quadrata omogenea $ABCD$ di massa $3m$ e lato di lunghezza 4ℓ viene asportato un rettangolo $EFGH$ i cui lati sono paralleli alla diagonale del quadrato, con $AE = AF = \ell$. Determinare i momenti centrali d'inerzia della lamina forata \mathcal{L} nelle direzioni \mathbf{e}_x ed $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_y$.*

Poiché sia il quadrato che il rettangolo asportato hanno per centro di massa il punto O di intersezione delle diagonali AC e BD , abbiamo

$$I_{O, \mathbf{e}_x}(\mathcal{L}) = I_{O, \mathbf{e}_x}(ABCD) - I_{O, \mathbf{e}_x}(EFGH)$$



e

$$I_{O, \mathbf{e}_z}(\mathcal{L}) = I_{O, \mathbf{e}_z}(ABCD) - I_{O, \mathbf{e}_z}(EFGH).$$

I momenti di inerzia dell'intero quadrato sono, rispettivamente,

$$I_{O, \mathbf{e}_x}(ABCD) = 4m\ell^2 \quad I_{O, \mathbf{e}_z}(ABCD) = 8m\ell^2.$$

Quanto ai contributi del rettangolo, osserviamo che esso ha lati $EF = GH = \ell\sqrt{2}$ e $EH = FG = 3\ell\sqrt{2}$ e dunque la sua massa è pari a $\frac{9}{8}m$. Indicati con \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 i versori diretti, rispettivamente, come $B - D$ e $A - C$, abbiamo

$$\mathbb{I}_O(EFGH) = \frac{3}{16}m\ell^2 [9\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + 10\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z]$$

per cui

$$\begin{aligned} I_{O, \mathbf{e}_x}(EFGH) &= \mathbf{e}_x \cdot \mathbb{I}_O(EFGH)\mathbf{e}_x = \frac{3}{16}m\ell^2 \mathbf{e}_x \cdot [9(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2] \\ &= \frac{3}{16}m\ell^2 [9(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_1)^2 + (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_2)^2] = \frac{15}{16}m\ell^2 \end{aligned}$$

dove abbiamo osservato che $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dunque in questo caso abbiamo

$$I_{O, \mathbf{e}_x}(\mathcal{L}) = \frac{49}{16}m\ell^2.$$

Analogamente, nella direzione \mathbf{e}_z abbiamo

$$I_{O, \mathbf{e}_z}(EFGH) = \mathbf{e}_z \cdot \mathbb{I}_O(EFGH)\mathbf{e}_z = \frac{15}{8}m\ell^2$$

per cui

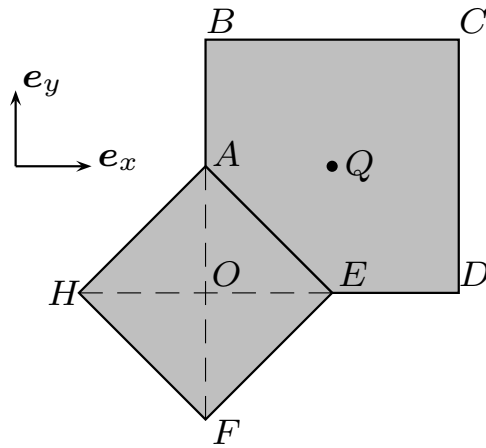
$$I_{O, \mathbf{e}_z}(\mathcal{L}) = \frac{49}{8}m\ell^2.$$

Osservazione. Il calcolo di $I_{O, \mathbf{e}_x}(EFGH)$ si può anche effettuare introducendo la matrice di inerzia $[\mathbb{I}_O(EFGH)]$ associata a $\mathbb{I}_O(EFGH)$ nella base indotta da $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_z\}$ e sviluppando il versore \mathbf{e}_x in questa base come $\mathbf{e}_x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ per cui

$$I_{O, \mathbf{e}_x}(EFGH) = \mathbf{e}_x \cdot [\mathbb{I}_O(EFGH)]\mathbf{e}_x =$$

$$= \frac{3}{32} m \ell^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{15}{16} m \ell^2.$$

Esercizio 2.11 Il poligono $ABCDE$ è stato ottenuto asportando il triangolo rettangolo isoscele OAE di lato ℓ dalla lamina quadrata omogenea $OBCD$ di lato 2ℓ e massa $2m$. Una seconda lamina quadrata $AEFH$ di lato $\ell\sqrt{2}$ e massa $\frac{m}{4}$ è saldata al



poligono lungo il lato AE , come indicato in figura. Determinare il momento di inerzia della lamina complessiva rispetto ad un asse passante per il punto Q di incontro delle diagonali di $OBCD$, ortogonale al piano della figura.

Siano $I_Q(OBCD)$ il contributo al momento di inerzia del quadrato $OBCD$, $I_Q(HAEF)$ il contributo del quadrato $HAEF$ e $I_Q(OAE)$ il contributo del triangolo OAE al momento di inerzia I_Q . Dal principio della lacuna abbiamo

$$I_Q = I_Q(OBCD) + I_Q(HAEF) - I_Q(OAE).$$

Esaminiamo separatamente i tre contributi. Poiché Q è il centro di massa di $OBCD$ abbiamo

$$I_Q(OBCD) = \frac{4}{3} m \ell^2.$$

Con l'ausilio del teorema di Huygens-Steiner otteniamo

$$I_Q(HAEF) = \frac{m \ell^2}{12} + \frac{m}{2} \ell^2 = \frac{7}{12} m \ell^2,$$

dove il primo addendo si riferisce al momento centrale di inerzia, calcolato cioè rispetto ad O . Per il calcolo di $I_Q(OAE)$ osserviamo anzitutto che, per simmetria materiale,

$$I_O(OAE) = \frac{1}{2} m \ell^2$$

dove abbiamo osservato che OAE è equivalente ai fini del calcolo del momento di inerzia lungo l'asse e_z passante per O alla quarta parte di un quadrato congruente ad $HAEF$ e massa pari ad m , cioè il quadruplo della massa di OAE . Detto G il centro di massa di OAE , se applichiamo due volte il teorema di Huygens-Steiner, prima prendendo come punto di riferimento diverso da G il punto O e poi il punto Q arriviamo a

$$I_Q(OAE) = I_O(OAE) + \frac{m}{4}[|Q - G|^2 - |O - G|^2].$$

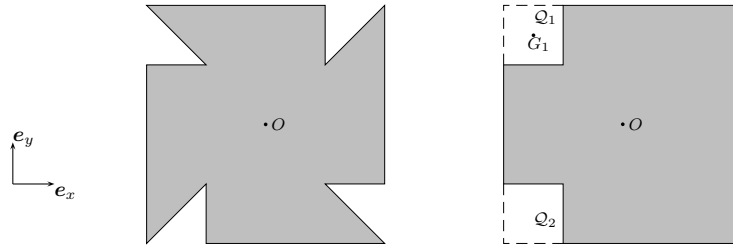
Se ricordiamo che G divide la mediana di AE di lunghezza $\ell\sqrt{2}$ in due parti, con $G - O = \frac{\sqrt{2}}{3}\ell$ ed osservando che $|G - Q| = |Q - O| - |G - O| = \frac{2}{3}\ell\sqrt{2}$ abbiamo

$$I_Q(OAE) = \frac{1}{2}m\ell^2 + \frac{m}{6}\ell^2 = \frac{2}{3}m\ell^2$$

e dunque

$$I_Q = \frac{4}{3}m\ell^2 + \frac{7}{12}m\ell^2 - \frac{2}{3}m\ell^2 = \frac{5}{4}m\ell^2.$$

Esercizio 2.12 Una lamina piana \mathcal{L} viene ottenuta asportando da una lamina quadrata omogenea di centro O , massa $6m$ e lati di lunghezza 4ℓ quattro triangoli rettangoli isosceli di cateto ℓ , disposti in modo che le ipotenuse giacciono lungo una diagonale, con un estremo in ciascuno dei vertici del quadrato, e con gli angoli retti posizionati ciascuno su un lato del quadrato. Calcolare il momento centrale d'inerzia



complessivo della lamina nella direzione e_z ortogonale al suo piano.

Osserviamo che il centro di massa della lamina \mathcal{L} coincide con il punto O , vista la sua simmetria. Ai fini del calcolo del momento di inerzia I_{O,e_z} non vi è alcuna differenza tra la lamina proposta e quella rappresentata qui sotto, dove i due triangoli di sinistra sono stati riflessi rispetto alla direzione verticale, passante per O , in modo da colmare i vuoti a destra. La lamina ottenuta in questo modo si può vedere come il quadrato di partenza, che indicheremo con \mathcal{Q} a cui sono stati asportati due quadrati più piccoli ciascuno dei quali da lo stesso contributo al momento di inerzia. Considerando il quadrato asportato \mathcal{Q}_1 abbiamo

$$I_{O,e_z}(\mathcal{L}) = I_{O,e_z}(\mathcal{Q}) - 2I_{O,e_z}(\mathcal{Q}_1).$$

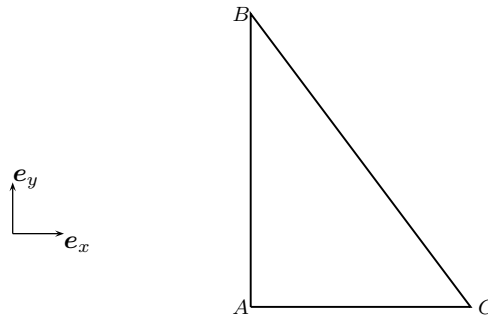
Poiché O è il centro di massa anche di \mathcal{Q} abbiamo $I_{O, \mathbf{e}_z}(\mathcal{Q}) = 16m\ell^2$ mentre, servendosi del teorema di Huygens-Steiner abbiamo

$$I_{O, \mathbf{e}_z}(\mathcal{Q}_1) = m(\mathcal{Q}_1) \left(\frac{1}{6} + \frac{9}{2} \right) \ell^2 = \frac{14}{3} m(\mathcal{Q}_1) \ell^2$$

e, dal momento che la massa $m(\mathcal{Q}_1)$ di \mathcal{Q}_1 è pari a $\frac{3}{8}m$, concludiamo che $I_{O, \mathbf{e}_z}(\mathcal{Q}_1) = \frac{7}{4}m\ell^2$ per cui

$$I_{O, \mathbf{e}_z}(\mathcal{L}) = \frac{25}{4}m\ell^2.$$

Esercizio 2.13 *Un telaio rigido è formato da tre aste omogenee disposte in modo da formare un triangolo rettangolo. L'asta AC ha massa m e lunghezza 3ℓ , AB ha massa $2m$ e lunghezza 4ℓ , BC ha massa $3m$ e lunghezza 5ℓ . Determinare il momento*



centrale di inerzia del corpo rispetto ad un asse diretto lungo \mathbf{e}_x . Determinare la matrice di inerzia rispetto ad A e trovare l'inclinazione della base principale in A rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$.

Per la prima parte di questo esercizio possiamo avvalerci del metodo adoperato nell'esercizio 2.9, applicando dapprima il teorema di composizione al sistema formato dalle due aste AB ed AC e, in seguito a quello formato dall'ipotenusa e dal sistema dei due cateti. Poiché il momento centrale di inerzia per AC lungo \mathbf{e}_x è nullo mentre la massa ridotta delle due aste è $\frac{2}{3}m$, abbiamo

$$I_{G_1, \mathbf{e}_x}^{(AB \cup AC)} = \frac{16}{3}m\ell^2.$$

L'ordinata del centro di massa dei due cateti è

$$y_{G_1} = \frac{4}{3}\ell$$

e dunque la distanza tra le due rette, una passante per G_1 , l'altra passante per il punto medio M dell'ipotenusa BC è $d = \frac{2}{3}\ell$. Infine, la massa ridotta del sistema

formato dall'ipotenusa e dall'insieme dei due cateti è pari a $\frac{3}{2}m$. Per procedere occorre osservare che l'angolo β nel vertice C è caratterizzato da

$$\sin \beta = \frac{4}{5} \quad \text{e} \quad \cos \beta = \frac{3}{5}$$

per cui il momento centrale di inerzia dell'ipotenusa nella direzione \mathbf{e}_x è, grazie all'equazione (2.22), $4m\ell^2$. Abbiamo allora

$$I_{G,\mathbf{e}_x} = \frac{16}{3}m\ell^2 + 4m\ell^2 + \frac{2}{3}m\ell^2 = 10m\ell^2.$$

Per la seconda parte dell'esercizio, osserviamo che l'asse diretto lungo \mathbf{e}_x e passante per A contiene l'asta AC , così come l'asse passante per A e diretto lungo \mathbf{e}_y contiene AB . Abbiamo allora, ricordando le funzioni trigonometriche dell'angolo β ,

$$I_{xx}^A = \frac{32}{3}m\ell^2 + 16m\ell^2 = \frac{80}{3}m\ell^2,$$

dove i contributi sono, nell'ordine, quello di AB e di BC ;

$$I_{yy}^A = 3m\ell^2 + 9m\ell^2 = 12m\ell^2,$$

dove ora i due contributi sono, nell'ordine, quello di AC e di BC . Inoltre,

$$I_{zz}^A = I_{xx}^A + I_{yy}^A = \frac{116}{3}m\ell^2.$$

Per la disposizione delle aste, solo BC contribuisce al momento centrifugo I_{xy}^A . Infatti, detto \mathbf{n} il versore diretto come $B - C$, e quindi inclinato di $\pi - \beta$ rispetto ad \mathbf{e}_x e di $\frac{\pi}{2} - \beta$ rispetto ad \mathbf{e}_y abbiamo

$$I_{xy}^A = \mathbf{e}_x \cdot \mathbb{I}_M^{BC} \mathbf{e}_y - 3mx_M y_M$$

dove il tensore centrale di inerzia è $\mathbb{I}_M^{BC} = \frac{25m}{4}\ell^2(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$ per cui

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbb{I}_M^{BC} \mathbf{e}_y = 3m\ell^2;$$

d'altra parte, le coordinate di M rispetto ad A sono $x_M = \frac{3}{2}\ell$ e $y_M = 2\ell$ per cui ricaviamo

$$I_{xy}^A = -6m\ell^2.$$

L'inclinazione φ della base che diagonalizza il tensore di inerzia \mathbb{I}_A si ottiene dall'equazione (2.14) e soddisfa

$$\tan 2\varphi = \frac{12}{44/3} = -\frac{9}{11}.$$

Senza perdere generalità possiamo assumere che 2φ appartenga al secondo quadrante per cui

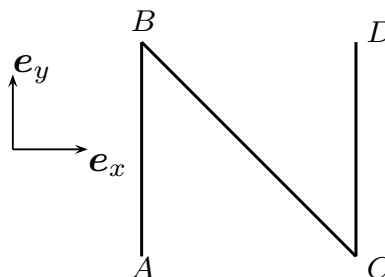
$$\sin 2\varphi = \frac{|\tan 2\varphi|}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi}} = \frac{9}{\sqrt{202}}$$

e dunque gli autovalori di \mathbb{I}_A distinti da I_{zz}^A sono dati da (2.15) e valgono

$$I_1 = \frac{2}{3} \left(29 - \sqrt{202} \right) m\ell^2 \quad I_2 = \frac{2}{3} \left(29 + \sqrt{202} \right) m\ell^2.$$

2.4 Esercizi proposti

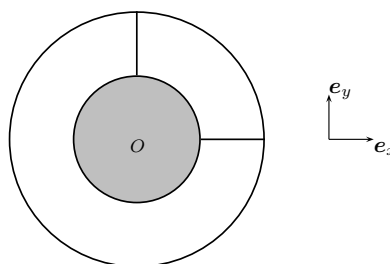
Esercizio 2.14 Un corpo rigido piano è formato da tre aste AB , BC e CD disposte come in figura. Le aste AB e CD giacciono su rette parallele a distanza ℓ , hanno



ugual lunghezza ℓ ed ugual massa $2m$. L'asta BC ha lunghezza $\ell\sqrt{2}$ e massa $3m$. Trovare il valore del rapporto $\lambda := I_{G_x}/I_{G_y}$ tra i momenti centrali di inerzia del corpo rispetto alle direzioni e_x ed e_y .

R: $\lambda = \frac{7}{15}$.

Esercizio 2.15 Un corpo rigido piano è formato da un anello di massa $m/2$, raggio $2R$ e centro in O , da un disco ad esso concentrico di massa $2m$ e raggio R e da due aste, ciascuna di lunghezza R e massa $3m$, saldate al disco ed all'anello ortogonalmente tra loro. Determinare il momento di inerzia per il sistema rispetto ad un asse



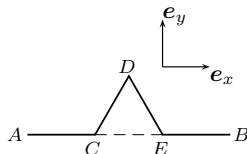
passante per O , diretto come e_x .

R: $I_{O,n} = \frac{17}{2}mR^2$

Esercizio 2.16 Considerata la lamina $AFEDCO$ oggetto dell'esercizio ??, si determinino le coordinate del suo centro di massa G rispetto al punto O ; il suo momento di inerzia rispetto all'asse passante per O e diretto lungo e_x ed il suo momento centrale di inerzia nella direzione e_y .

$$\mathbf{R}: G - O \equiv \left(\frac{17}{10}\ell, \frac{7}{5}\ell\right); I_{O, \mathbf{e}_x} = \frac{11}{2}m\ell^2; I_{G, \mathbf{e}_y} = \frac{433}{160}m\ell^2.$$

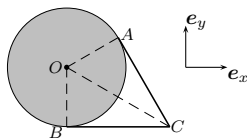
Esercizio 2.17 Un'asta omogenea AB di massa $9m$ e lunghezza 12ℓ viene suddivisa in tre parti di ugual lunghezza e quella centrale CE viene rimossa e sostituita con altre due aste CD e DE , inclinate di $\pi/3$ sull'orizzontale entrambe lunghe come CE e dotate della stessa massa di CE . Trovare il momento centrale di inerzia per la



spezzata $ACDEB$ nella direzione \mathbf{e}_x .

$$\mathbf{R}: I_{G, \mathbf{e}_x} = \frac{15}{2}mR^2$$

Esercizio 2.18 In un piano è assegnato un corpo rigido formato da un disco di centro O , raggio R e massa $3m$ e da due aste BC ed AC di ugual lunghezza $R\sqrt{3}$, di masse $3m$ e $4m$, rispettivamente, e tangenti al disco in B ed A . Determinare il momento di



inerzia per l'intero sistema rispetto all'asse sovrapposto ad OA .

$$\mathbf{R}: I_{OA} = 10mR^2$$

Esercizio 2.19 Un corpo rigido piano è formato da un quadrato $ABCD$ con lato di lunghezza 2ℓ e massa $4m$ e da due aste, CF di massa $2m$ e lunghezza ℓ , saldata in modo da trovarsi sul prolungamento del lato CD , e EF di massa $2m$ e lunghezza $\sqrt{2}\ell$, disposto in modo che E coincida col punto medio di BC . Determinare coordinate del centro di massa G del corpo rispetto al punto A , il momento di inerzia del corpo rispetto alla diagonale BD ed il momento centrale di inerzia del corpo nella direzione \mathbf{e}_y .

$$\mathbf{R}: G - A \equiv \left(\frac{7}{4}\ell; -\frac{11}{8}\ell\right). \quad I_{BD} = 12m\ell^2. \quad I_{G, \mathbf{e}_y} = \frac{37}{6}m\ell^2.$$

