Capitolo 5

Stabilità dell'equilibrio e modi normali di oscillazione

5.1 Richiami teorici

Ci occuperemo dello studio della stabilità delle configurazioni ordinarie di equilibrio per un sistema $\mathcal{M}$ soggetto a vincoli olonomi, scleronomi e perfetti ed a forze attive conservative. Indichiamo con $\{q_1, q_2, \ldots q_n\}$ l'insieme delle n coordinate generalizzate che descrivono le configuazioni del sistema e siano $\{q_1^0, q_2^0, \ldots q_n^0\}$ i valori che esse assumono in una configurazione di equilibrio, individuata risolvendo il sistema

$$\nabla V = 0. \tag{5.1}$$

Definizione 5.1 *Una configurazione di equilibrio $q_0 \equiv \{q_1^0, q_2^0, \ldots q_n^0\}$ è detta stabile nel senso di Ljapunov se, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, con $\delta = \delta(\varepsilon)$ tale che, se $|q_i(0) - q_i^0| < \delta$ e $|\dot{q}_i(0)| < \delta$, per $i = 1, ..., n$, allora $|q_i(t) - q_i^0| < \varepsilon$ e $|\dot{q}_i(t)| < \varepsilon$, $\forall t > 0$.*

La definizione appena proposta non ha grande valenza applicativa perché per poterla applicare occorrerebbe conoscere l'andamento temporale delle soluzioni delle equazioni di moto che partono in un intoerno della configurazione di equilibrio. Risultano perciò molto importante i seguenti criteri che permettono di discernere la stabilità o meno di una configurazione di equilibrio nel senso di Ljapunov prescindendo dalla verifica della definizione. Il primo risultato in tal senso è il seguente teorema, dovuto a Dirichlet e Lagrange.

Teorema 5.1 *Se una configurazione di equilibrio $q_0 \equiv \{q_1^0, q_2^0, \ldots q_n^0\}$ ordinaria di un sistema soggetto a vincoli olonomi, scleronomi e perfetti ed a forze attive conservative corrisponde ad un punto di minimo relativo isolato dell'energia potenziale V, allora la configurazione di equilibrio q^0 è stabile nel senso di Dirichlet.*

Molto utile è poi il seguente (primo) criterio di instabilità di Ljapunov per una configurazione di equilibrio ordinaria

Teorema 5.2 *Sia $q_0 \equiv \{q_1^0, q_2^0, \dots q_n^0\}$ una configurazione di equilibrio ordinaria di un sistema soggetto a vincoli olonomi, scleronomi e perfetti ed a forze attive conservative di energia potenziale V, di classe C^2 nelle coordinate generalizzate. Se q_0 non corrisponde ad un punto di minimo relativo isolato dell'energia potenziale V e se questa conclusione si ottiene dallo studio della forma hessiana dell'energia potenziale calcolata in q_0, allora la configurazione di equilibrio q_0 è instabile nel senso di Ljapunov.*

Osservazione Il criterio di instabilità appena enunciato *non* rappresenta l'inversione del teorema di Dirichlet-Lagrange, dal momento che pone tra le ipotesi il fatto di poter stabilire che q_0 non è un minimo dall'analisi delle derivate seconde dell'energia potenziale. Qualora lo studio della forma hessiana non permettesse di trarre questa conclusione, il primo criterio di instabilità di Ljapunov non sarebbe applicabile.

5.1.1 Modi normali di oscillazione

Una volta determinate le configurazioni di equilibrio, è possibile studiare il moto del sistema $\mathcal{M}$ in un intorno di questa, ricorrendo alla teoria dei modi normali di oscillazione. Anche qui, per semplicità di esposizione ci limiteremo a considerare le configurazioni di equilibrio ordinarie di un sistema dotato di n gradi di libertà, soggetto a vincoli olonomi, scleronomi e perfetti e sul quale agiscono solo forze conservative deducibili da un'energia potenziale V. In questo caso, è possibile introdurre la funzione lagrangiana L e, se

$$\boldsymbol{q}^0 = \begin{pmatrix} q_1^0 \\ q_2^0 \\ \dots \\ q_n^0 \end{pmatrix}$$

rappresenta il vettore colonna (formale) dei valori assunti dalle coordinate lagrangiane $\{q_1, q_2, \dots q_n\}$ nella configurazione di equilibrio e

$$\boldsymbol{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \dots \\ q_n(t) \end{pmatrix}$$

rappresenta il più generale spoatamento del sistema dalla configurazione di equilibrio, stabile o meno, allora si ha

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}_0 + \varepsilon \boldsymbol{v}(t)$$

dove ε è un parametro adimensionale su cui si pone la restrizione $|\varepsilon| \ll 1$ in quanto $\varepsilon\boldsymbol{v}(t)$ rappresenta lo scostamento di $\boldsymbol{q}(t)$ dal valore di equilibrio $\boldsymbol{q}_0$ e le equazioni di moto approssimate sono state ottenute trascurando termini contenenti ε con potenze superiori alla seconda. Il vettore $\boldsymbol{v}(t)$ ha la seguente struttura:

$$\boldsymbol{v}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\boldsymbol{v}_i$$

dove la dipendenza temporale figura solo nei coefficienti scalari c_i la cui struttura dipende dal segno delle radici dell'equazione algebrica

$$\det(\lambda \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = 0 \tag{5.2}$$

dove $\boldsymbol{A}$ è la forma quadratica associata all'energia cinetica del sistema $\mathcal{M}$, calcolata nella configurazione di equilibrio. Essa è rappresentata dalla matrice $n \times n$ simmetrica e definita positiva

$$(\boldsymbol{A})_{ij} := \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \dot{q}_j}\right|_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0}$$

e le derivate seconde dell'energia cinetica T rispetto alle velocità generalizzate sono calcolate nella configurazione di equilibrio. La matrice simmetrica *Btens* non è altro che la forma quadratica hessiana associata all'energia potenziale V, sempre calcolata nella configurazione di equilibrio:

$$\boldsymbol{B}_{ij} := \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i q_j}\right|_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_0}.$$

Se λ_1, λ_2,..., λ_n sono le n radici dell'equazione caratteristica (5.2), allora i coefficienti $c_i(t)$ possono assumere una delle tre forme seguenti:

$$c_i(t) = \begin{cases} \alpha_i \cos \sqrt{\lambda_i} t + \beta_i \sin \sqrt{\lambda_i} t & \text{se } \lambda_i > 0 \\ \alpha_i + \beta_i t & \text{se } \lambda_i = 0 \\ \alpha_i \cosh \sqrt{-\lambda_i} t + \beta_i \sin \sqrt{-\lambda_i} t & \text{se } \lambda_i < 0 \end{cases}$$

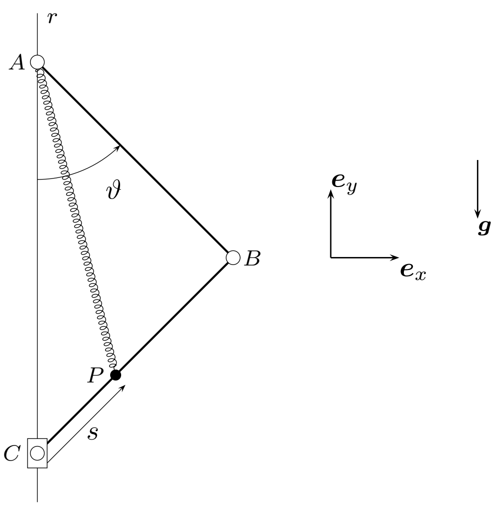
dove α_i e β_i sono costanti che dipendono dalle condizioni iniziali prescelte. I vettori $\boldsymbol{v}_i$ sono le soluzioni dell'equazione

$$(\lambda_i \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}.$$

Il vettore $\boldsymbol{v}(t)$ degli scostamenti dalla posizione di equilibrio è dunque combinazione lineare, a coefficienti dipendenti dal tempo, di n vettori *costanti* nel tempo e ciascun vettore $c_i(t)\boldsymbol{v}_i$ è noto come *modo normale di oscillazione* del sistema $\mathcal{M}$. È chiaro che solo nel caso in cui tutte le radici λ_i dell'equazione (5.2) sono positive, le funzioni $c_i(t)$ sono limitate nel tempo e quindi il sistema permate per tutti gli istanti in un intorno della configurazione di equilibrio del sistema che risulta stabile nel senso di Ljapunov. In effetti l'analisi di stabilità basata sul teorema di Dirichlet-Lagrange è puramente *statica*, dal momento che si basa solo sull'analisi dell'energia potenziale, senza considerare la dinamica del moto del sistema quando all'istante iniziale la configurazione di equilibrio viene perturbata. Con l'analisi dei modi normali di oscillazione, non solo l'analisi di stabilità basata sullo studio dei punti critici di V trova conferma ma si ottengono informazioni ulteriori circa la natura del più generale moto approssimato in un intorno di una configurazione di equilibrio. Osserviamo infine che l'analisi modale è utile anche nel caso in cui una delle soluzioni di (5.2) fosse negativa o nulla. Infatti in tal caso la funzione $c_i(t)$ corrispondente *non* resta limitata nel tempo e dunque non è possibile confinare il moto del sistema in un intorno della configurazione di equilibrio, che risulta dunque *instabile* nel senso di Ljapunov. Nel caso in cui $\lambda_i > 0$, le quantità $\omega_i := \sqrt{\lambda_i}$ sono detta *pulsazioni* delle piccole oscillazioni. La conoscenza del vettore $\boldsymbol{v}_i$ corrispondente è pure interessante perché consente di stabilire la *natura* del modo normale instabilizzante e suggerire di conseguenza come stabilizzare una configurazione di equilbrio vincolando ulteriormente il sistema: negli esercizi proposti, vedremo esempi di questa procedura. Nulla vieta l'esistenza di modi normali corrispondenti a valori positivi di λ_i anche quando una configurazione è stabile. Il corrispondente modo normale è detto modo normale *oscillante* mentre il modo normale corrispondente a $\lambda_i = 0$ è detto modo normale *lineare* ed infine quello corrispondente ad un valore negativo di λ_i è detto modo normale *iperbolico.*

5.2 Esercizi proposti

Esercizio 5.1 *In un piano verticale, due aste AB e BC, di ugual massa m e ugual lunghezza 2ℓ sono incernierate tra loro nell'estremo comune B, mentre A è incernierato ad un punto fisso A di una guida r verticale, dove l'estremo C è libero di scorrere. Un punto P di massa $3m$ si muove senza attrito lungo il braccio BC ed è attratto verso A da una molla ideale di costante mg/ℓ. Introdotte le coordinate ϑ ed s indicate in figura e supponendo perfetti tutti i vincoli, studiare la stabilità della configurazione di equilibrio in cui $\vartheta = 0$ e determinare le corrispondenti pulsazioni della piccole oscillazioni.*



Nelle ipotesi del testo, e siccome tutte le forze attive sono conservative, possiamo concludere che le configurazioni di equilibrio ordinarie corrispondono ai punti critici dell'energia potenziale V i cui contributi sono quelli della forza peso e della forza elastica. Per la forza peso, fissato come livello di riferimento l'orizzontale passante per il punto fisso A, il contributo di AB è $-mg\ell\cos\vartheta$, quello di BC è $-3mg\ell\cos\vartheta$ e quello di P è $3mg(s-4\ell)\cos\vartheta$. Il contributo della forza elastica che richiama P verso A è $\frac{mg}{\ell}AP^2$: per trovare la lunghezza di AP possiamo applicare il teorema di Carnot al triangolo ACP che ha l'angolo in C di ampiezza ϑ. Siccome $AC = 4\ell\cos\vartheta$ abbiamo allora

$$AP^2 = s^2 + 16\ell^2\cos^2\vartheta - 8s\ell\cos^2\vartheta$$

e dunque l'energia potenziale complessiva è

$$V = 3mgs\cos\vartheta - 16mg\ell\cos\vartheta + \frac{mg}{2\ell}[s^2 + 8\ell\cos^2\vartheta(2\ell - s)].$$

Le configurazioni di equilibrio ordinarie risolvono dunque il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0 \end{cases}$$

che in questo caso divengono

$$\begin{cases} mg[3\cos\vartheta + \frac{s}{\ell} - 4\cos^2\vartheta] = 0 \\ mg\sin\vartheta[-3s + 16\ell - 8\cos\vartheta(2\ell - s)] = 0 \end{cases}$$

La configurazione in cui $\vartheta = 0$ soddisfa la seconda equazione e, sostiuendo $\vartheta = 0$ nella prima equazione si ricava il corrispondente valore di s: $s = \ell$. La forma hessiana B nella configurazione di equilibrio si ottiene a partire dalle derivate seconde di V, date da

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \frac{mg}{\ell} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial \vartheta} = mg\sin\vartheta(-3 + 8\cos\vartheta)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = mg\{\cos\vartheta[-3s + 16\ell - 8\cos\vartheta(2\ell - s)] + 8\sin^2\vartheta(2\ell - s)\}$$

e sostituendo i valori di ϑ ed s all'equilibrio. Abbiamo allora

$$B = mg\begin{pmatrix} \frac{1}{\ell} & 0 \\ 0 & 5\ell \end{pmatrix}$$

che è definita positiva, avendo gli autovalori strettamente positivi. Dunque la configurazione proposta è stabile per il teorema di Dirichlet-Lagrange.

Per determinare la pulsazione delle piccole oscillazioni, occorre procurarsi l'espressione dell'energia cinetica del sistema. Per questo, è conveniente introdurre una base mobile $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$, solidale a BC e tale che $\boldsymbol{e}_1 = \frac{B-C}{|B-C|}$ e $\boldsymbol{e}_2$, ortogonale a $\boldsymbol{e}_1$ e tale che $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$. Questa base ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = -\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ rispetto alla base $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$. Il contributo di AB all'energia cinetica si determina osservando che il suo estremo A è fisso per cui, siccome AB ruota con velocità angolare $\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$,

$$T_{AB} = \frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2\boldsymbol{e}_z \cdot \mathbb{I}_A\boldsymbol{e}_z = \frac{2}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2.$$

Per l'asta BC conviene usare la formula generale

$$T_{BC} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I}_G \boldsymbol{\omega} + \frac{m}{2} v_G^2,$$

dove G indica il centro di massa di BC, il cui vettore posizione rispetto ad A è

$$G - A = -4\ell \cos\vartheta \boldsymbol{e}_y + \ell \boldsymbol{e}_1.$$

Derivando $G - A$ rispetto al tempo e servendosi delle formule di Poisson, abbiamo

$$\boldsymbol{v}_G = 4\ell\dot{\vartheta} \sin\vartheta \boldsymbol{e}_y - \ell\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2$$

per cui

$$v_G^2 = 16\ell^2\dot{\vartheta}^2 \sin^2\vartheta + \ell^2\dot{\vartheta}^2 - 8\ell^2\dot{\vartheta}^2 \sin^2\vartheta,$$

dove abbiamo notato che $\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_y = \sin\vartheta$. Possiamo allora scrivere

$$T_{BC} = \frac{1}{6} m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{2}[1 + 8\sin\vartheta^2]\ell^2\dot{\vartheta}^2.$$

Infine, siccome

$$P - A = -4\ell \cos\vartheta \boldsymbol{e}_y + s\boldsymbol{e}_1,$$

abbiamo

$$\boldsymbol{v}_P = 4\ell\dot{\vartheta} \sin\vartheta \boldsymbol{e}_y + \dot{s}\boldsymbol{e}_1 - s\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2$$

per cui il contributo di P all'energia cinetica è

$$T_P = \frac{3m}{2}[16\ell^2\dot{\vartheta}^2 \sin^2\vartheta + \dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2 + 8\ell\dot{\vartheta}\sin\vartheta(\dot{s}\cos\vartheta - s\dot{\vartheta}\sin\vartheta)].$$

Sommando i tre contributi ora trovati concludiamo che l'energia cinetica totale T è

$$T = \frac{4}{3} m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + 28m\ell^2\dot{\vartheta}^2 \sin^2\vartheta + \frac{3m}{2}[\dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2 + 8\ell\dot{\vartheta}\sin\vartheta(\dot{s}\cos\vartheta - s\dot{\vartheta}\sin\vartheta)].$$

Possiamo ora trovare la forma quadratica A associata all'energia cinetica, in un intorno della configurazione di equilibrio stabile da studiare. Infatti, con calcoli diretti, si mostra che

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{s}^2} = 3m \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{s}\partial\dot{\vartheta}} = 12m\ell\sin\vartheta\cos\vartheta \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\vartheta}^2} = 8m\ell^2\left(\frac{1}{3} + 7\sin^2\vartheta\right) + 3ms^2 - 24ms\ell\sin^2\vartheta$$

e dunque, inseriti i valori $s = \ell$ e $\vartheta = 0$ delle coordinate lagrangiane all'equilibrio, si ricava

$$A = m\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{17}{3}\ell^2 \end{pmatrix}.$$

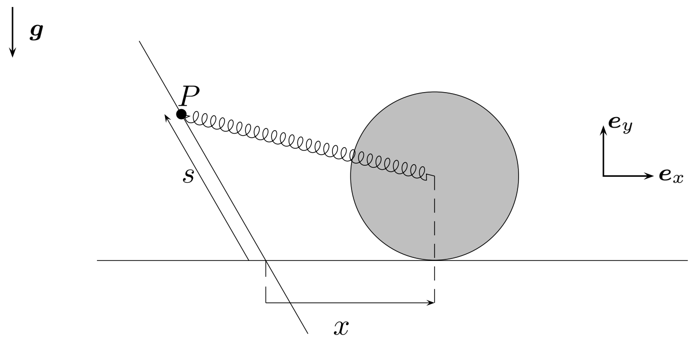
Per determinare le pulsazioni delle piccole oscillazioni, osserviamo che le radici λ_1 e λ_2 dell'equazione $\det(\lambda A - B) = 0$ sono

$$\lambda_1 = \frac{g}{3\ell} \qquad \lambda_2 = \frac{15g}{17\ell}$$

per cui le pulsazioni richieste sono

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{3\ell}} \qquad \text{e} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{15g}{17\ell}}.$$

Esercizio 5.2 *In un piano verticale un disco omogeneo di massa $2m$ e raggio R è libero di rotolare senza strisciare su una guida orizzontale. Un punto materiale P di massa $3m$ è libero di muoversi senza attrito su una seconda guida inclinata di $\pi/3$ rispetto alla precedente ed è collegato al centro del disco da una molla ideale di costante elastica $2mg/R$. Introdotte le coordinate x ed s descritte in figura, trovare le pulsazioni delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile e caratterizzare i corrispondenti modi normali di oscillazione.*



In un sistema cartesiano $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ con origine nel punto di intersezione delle due rette su cui avviene il moto del sistema il centro del disco ha coordinate (x, R) ed il punto P ha coordinate $(-s/2, \sqrt{3}s/2)$. l'energia cinetica T del sistema è

$$T = \frac{3m}{2}(\dot{s}^2 + \dot{x}^2)\,,$$

dove il primo addendo si riferisce a P, il secondo al disco. Trascurando il contributo costante dell'energia potenziale gravitazionale del disco, l'energia potenziale è

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2}mgs + \frac{mg}{R}[(x + \frac{s}{2})^2 + (R - \frac{s}{2}\sqrt{3})^2]$$

o, svolgendo i quadrati ed eliminando altri termini costanti,

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2}mgs + \frac{mg}{R}[x^2 + s^2 + sx - Rs\sqrt{3}]\,.$$

Le configurazioni di equilibrio ordinarie si ottengono annullando le derivate di V rispetto ad x e ad s

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{mg}{R}(2x + s) = 0 \\ \\ \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{3\sqrt{3}}{2}mg + \frac{mg}{R}[2s + x - R\sqrt{3}] = 0\,: \end{cases}$$

dalla prima equazione si ricava la condizione $s = -2x$ che, sostituita nella seconda, fornisce

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{6}R \qquad \text{e} \qquad s_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}R$$

come valori delle coordinate nella configurazione di equilibrio. La forma hessiana B, data da

$$B = \frac{mg}{R}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

è definita positiva e dunque la configurazione di equilibrio trovata è stabile. Posto

$$\boldsymbol{q}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ s(t) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{q}^0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ s_0 \end{pmatrix},$$

Il più generale moto approssimato in un intorno della configurazione di equilibrio stabile del sistema è

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}^0 + \varepsilon[c_1(t)\boldsymbol{v}_1 + c_2(t)\boldsymbol{v}_2]$$

e per caratterizzare $c_1(t)$ e $c_2(t)$ occorre risolvere in λ l'equazione $\det(\lambda A - B) = 0$, dove A è la forma quadratica associata all'energia cinetica:

$$A = m\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Questa equazione è data da

$$3\lambda^2 - 4\frac{g}{R}\lambda + \frac{g^2}{R^2} = 0$$

ed ha come soluzioni

$$\lambda_1 = \frac{g}{R} \qquad \lambda_2 = \frac{g}{3R},$$

da cui si ottengono le pulsazioni

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{3R}}\ :$$

abbiamo allora

$$c_1(t) = \alpha_1 \cos\omega_1 t + \beta_1 \sin\omega_1 t \qquad c_2(t) = \alpha_2 \cos\omega_2 t + \beta_2 \sin\omega_2 t.$$

Posto

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1s} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2s} \end{pmatrix}$$

otterremo $\boldsymbol{v}_1$ risolvendo l'equazione $\det(\lambda_1 A - B)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ che impone

$$v_{1x} = v_{1s}$$

mentre, risolvendo l'equazione $\det(\lambda_2 A - B)\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$, otteniamo $v_{2x} = -v_{2s}$. Scelti $v_{1s} = v_{2s} = 1$ abbiamo allora

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

il modo normale associato a λ_1 è

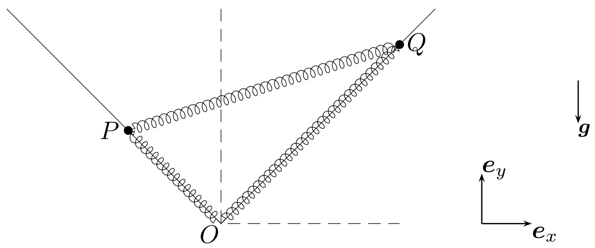
$$x(t) = x_0 + \varepsilon c_1(t) \qquad \text{e} \qquad s(t) = s_0 + \varepsilon c_1(t)$$

in esso dunque x ed s crescono odecrescono concordemente. Il modo associato a $\lambda = \lambda_2$ è

$$x(t) = x_0 - \varepsilon c_2(t) \qquad \text{e} \qquad s(t) = s_0 + \varepsilon c_2(t)$$

per cui ora quando x cresce, s decresce e viceversa.

Esercizio 5.3 *In un piano verticale due punti materiali P e Q di massa m e $2m$ sono vincolati a muoversi senza attrito su due guide rettilinee disposte lungo le bisettrici di un riferimento cartesiano $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$. I due punti sono collegati tra loro da una molla ideale di costante elastica mg/ℓ. Inoltre P è attratto verso l'origine da una molla di*



costante elastica $2mg/\ell$ e lunghezza a riposo 2ℓ mentre Q è attratto verso l'origine da una seconda molla di costante elastica $3mg/\ell$ e lunghezza a riposo ℓ. Determinare l'energia cinetica e potenziale del sistema, determinare la configurazione di equilibrio studiandone la stabilità. Infine trovare le frequenze delle piccole oscillazioni in un intorno della configurazione di equilibrio stabile e qualificare i corrispondenti modi normali.

In termini delle coordinate s ed u che individuano le posizioni di P e Q sulle rispettive rette di moto, l'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}\dot{s}^2 + m\dot{u}^2.$$

L'energia potenziale contiene i contributi della forza peso: $mgs\frac{\sqrt{2}}{2}$ per P e $mgu\sqrt{2}$ per Q ed i contributi delle forze elastiche: $\frac{mg}{2\ell}(s^2 + u^2)$ relativo alla molla che attrae tra loro P e Q, $\frac{mg}{\ell}(s-2\ell)^2$, relativo alla molla che richiama P verso O e $\frac{3mg}{2\ell}(u-\ell)^2$, per la molla che attrae Q ad O. In definitiva, l'energia potenziale è

$$V = mg\sqrt{2}(\frac{s}{2}+u) + \frac{mg}{\ell}\left(\frac{3}{2}s^2 + 2u^2 - 4s\ell - 3u\ell + \frac{11}{2}\ell^2\right)$$

da cui si ricavano le condizioni di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{mg}{2}\sqrt{2} + 3mg\frac{s}{\ell} - 4mg = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial u} = mg\sqrt{2} + 4mg\frac{u}{\ell} - 3mg = 0 \end{cases}$$

che sono verificate da

$$s_0 = \ell\left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right) \qquad \text{e} \qquad u_0 = \frac{\ell}{4}\left(3-\sqrt{2}\right).$$

La matrice hessiana, indipendente dal valore della coppia (s,u) è

$$B = \frac{mg}{\ell}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

mentre la forma quadratica associata all'energia cinetica T, anch'essa indipendente dalla configurazione, è

$$A = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entrambe le matrici sono in forma diagonale per cui le radici di $\det(\lambda A - B) = 0$ si trovano senza problemi e sono

$$\lambda_1 = \frac{3g}{\ell} \qquad , \qquad \lambda_2 = \frac{g}{\ell}.$$

Posto

$$\boldsymbol{q}(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ u(t) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{q}^0 = \begin{pmatrix} s_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

il più generale moto approssimato in un intorno della configurazione di equilibrio stabile è

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}^0 + \varepsilon[c_1(t)\boldsymbol{v}_1 + c_2(t)\boldsymbol{v}_2]$$

con

$$c_1(t) = \alpha_1\cos\omega_1 t + \beta_1\sin\omega_1 t \qquad \text{e} \qquad c_2(t) = \alpha_2\cos\omega_2 t + \beta_2\sin\omega_2 t,$$

essendo $\omega_{1,2} = \sqrt{\lambda_{1,2}}$. I vettori costanti $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ risolvono le equazioni

$$(\lambda_1 A - B)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \qquad \text{e} \qquad (\lambda_2 A - B)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}.$$

e scritto

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1s} \\ v_{1u} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{2s} \\ v_{2u} \end{pmatrix}$$

la prima equazione diventa

$$\frac{mg}{\ell}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1s} \\ v_{1u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che impone la condizione $v_{1u} = 0$ per cui, posto per semplicità $v_{1s} = 1$, abbiamo

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ed il modo normale corrispondente è caratterizzato da

$$s(t) = s_0 + 2\varepsilon c_1(t) \qquad , \qquad u(t) = u_0 :$$

solo il punto P oscilla attorno alla posizione di equilibrio, mentre Q resta fermo. Analogamente, risolvendo l'equazione $(\lambda_2 A - B)\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$

$$\frac{mg}{\ell}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{2s} \\ v_{2u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ottieniamo $v_{2s} = 0$ e quindi, posto per semplicità $v_{2u} = 1$ il modo normale è caratterizzato da

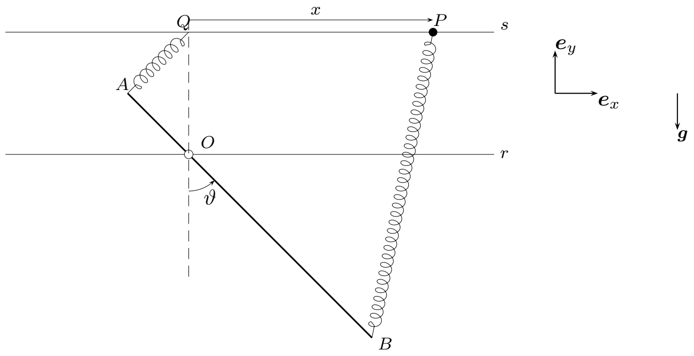
$$s(t) = s_0 \qquad , \qquad u(t) = u_0 + \varepsilon c_2(t)$$

ed è ora Q il solo punto a muoversi.

Esercizio 5.4 *In un piano verticale, un'asta AB di massa m e lunghezza 4ℓ è incernierata ad un punto fisso O distante ℓ da A. L'estremo A è richiamato verso un punto fisso Q posto sulla verticale di O e distante 2ℓ da O da una molla ideale di costante elastica mg/ℓ, mentre B è attratto da un'altra molla ideale di costante $2mg/\ell$ verso un punto P di massa m mobile lungo una guida s orizzontale, distante 2ℓ da r, retta orizzontale passante per O. Introdotte le coordinate ϑ ed x indicate in figura, determinare l'energia cinetica e quella potenziale del sistema. Determinare tutte le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità, determinando la pulsazione degli eventuali modi normali oscillanti attorno alle configurazioni di equilibrio in cui AB è verticale.*

L'energia cinetica si può calcolare osservando che O è un punto fisso solidale all'asta AB per cui il contributo dell'asta è

$$T_{AB} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I}_O \boldsymbol{\omega},$$



dove $\boldsymbol{\omega} = \dot\vartheta \boldsymbol{e}_z$ è la velocità angolare dell'asta e $\mathbb{I}_O$ è il tensore di inerzia dell'asta rispetto al punto O. Grazie al teorema di Huygens-Steiner abbiamo $\boldsymbol{e}_z \cdot \mathbb{I}_O \boldsymbol{e}_z = \frac{7}{3} m\ell^2 \dot\vartheta^2$ per cui

$$T_{AB} = \frac{7}{6} m\ell^2 \dot\vartheta^2.$$

Aggiungendo il contributo $\frac{m}{2}\dot x^2$ dovuto al punto P possiamo scrivere l'energia cinetica come

$$T = \frac{7}{6} m\ell^2 \dot\vartheta^2 + \frac{m}{2}\dot x^2.$$

All'energia potenziale contribuiscono la forza peso per l'asta AB, dal momento che il punto P non cambia quota durante il moto, e l'energia elastica associata alle due molle. Poiché $CO = \ell$, deve essere

$$V = -mg\ell\cos\vartheta + \frac{mg}{2\ell}|Q-A|^2 + \frac{mg}{\ell}|P-B|^2.$$

Per calcolare $|Q-A|$ possiamo utilizzare il teorema di Carnot, applicato al triangolo QOA e ricavare

$$|Q-A|^2 = 5\ell^2 - 4\ell^2\cos\vartheta.$$

Per il calcolo di $|P-B|$ conviene adoperare la distanza euclidea tra due punti e scrivere

$$|P-B|^2 = (x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2$$

e poiché, centrando gli assi coordinati $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$ in O, le coordinate di P e B sono rispettivamente, $P \equiv (x, 0)$ e $B \equiv (3\ell\sin\vartheta, -3\ell\cos\vartheta)$, abbiamo

$$|P-B|^2 = x^2 + 12\ell^2\cos\vartheta - 6\ell x\sin\vartheta + 13\ell^2$$

per cui

$$V = 9mg\ell\cos\vartheta + \frac{mg}{\ell}x^2 - 6mgx\sin\vartheta + 13\ell^2.$$

Le configurazioni di equilibrio ordinarie si ottengono annullando le derivate di V rispetto alle coordinate generalizzate:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = 2\frac{mg}{\ell}x - 6mg\sin\vartheta = 0 \\ \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = -9mg\ell\sin\vartheta - 6mgx\cos\vartheta = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava la relazione $x = 3\ell\sin\vartheta$: all'equilibrio l'estremo B dell'asta è sulla stessa verticale di P. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo

$$-9mg\ell\sin\vartheta(1+2\cos\vartheta) = 0$$

che è soddisfatta da $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$ e dalle radici $\vartheta \in [0, 2\pi]$ di $1 + 2\cos\vartheta = 0$ che sono $\vartheta = \frac{2}{3}\pi$ e $\vartheta = \frac{4}{3}\pi$. Le coppie ordinate (x, ϑ) che corrispondono alle configurazioni di equilibrio sono

$$E_1 \equiv (0,0) \qquad E_2 \equiv (0,\pi) \qquad E_3 \equiv \left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\ell, \frac{2}{3}\pi\right) \qquad E_4 \equiv \left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}\ell, \frac{4}{3}\pi\right)$$

e per studiarne la stabilità dobbiamo procurarci la matrice hessiana di V. Siccome

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 2\frac{mg}{\ell} \\ \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \vartheta} = -6mg\cos\vartheta \\ \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = -9mg\ell\cos\vartheta + 6mgx\sin\vartheta \end{cases}$$

Abbiamo

$$B(E_1) = mg\begin{pmatrix} \frac{2}{\ell} & -6 \\ -6 & -9\ell \end{pmatrix} \qquad B(E_2) = mg\begin{pmatrix} \frac{2}{\ell} & 6 \\ 6 & 9\ell \end{pmatrix}$$

e

$$B(E_3) = mg\begin{pmatrix} \frac{2}{\ell} & 3 \\ 3 & 18\ell \end{pmatrix} = B(E_4)$$

poiché le prime due matrici hanno determinante negativo, E_1 ed E_2 corrispondono a punti di sella di V e dunque sono instabili. Al contrario sia E_3 che E_4 hanno hessiane definite positive e dunque sono punti di minimo relativo isolato per V, stabili per il teorema di Dirichlet-Lagrange.

Per trovare le pulsazioni dei modi normali oscillanti in E_1 od E_2 procuriamoci anzitutto la forma quadratica A associata all'energia cinetica. Abbiamo

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} = m \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}\partial\dot{\vartheta}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\vartheta}^2} = \frac{7}{3}m\ell^2$$

e dunque tutte le derivate seconde non dipendono dalla configurazione di equilibrio scelta. La forma quadratica A è

$$A = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3}\ell^2 \end{pmatrix}.$$

Risolviamo ora l'equazione

$$\det(\lambda A - B(E_1)) = 0$$

cioè

$$\frac{7}{3}\ell^2\lambda^2 - \frac{13}{3}g\ell\lambda - 54g^2\ell^2 = 0$$

le cui radici sono

$$\lambda_\pm = \frac{-13 \pm \sqrt{3865}}{14}\frac{g}{\ell}$$

per cui la pulsazione dell'unico modo oscillante è

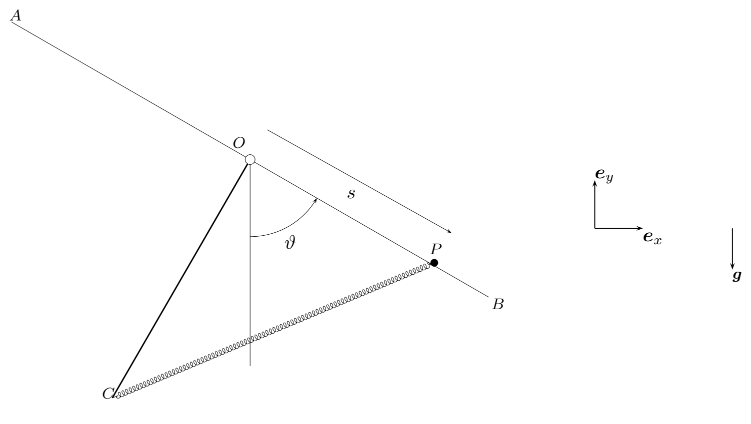
$$\omega_+ = \sqrt{\lambda_+}.$$

Similmente, nella configurazione E_2, risolvendo $\det(\lambda A - B(E_2)) = 0$ si ricava

$$\lambda_\pm = \frac{41 \pm \sqrt{2893}}{14}\frac{g}{\ell}$$

e la pulsazione richiesta è ancora $\omega_+ = \sqrt{\lambda_+}$.

Esercizio 5.5 *In un piano verticale, un'asta ABC a forma di T ha il punto medio O del braccio AB incernierato ad un punto fisso; il braccio AB ha massa trascurabile e lunghezza 4ℓ mentre OC ha lunghezza 2ℓ e massa $2m$. Su AB è mobile senza attrito un punto materiale P di massa m, attratto verso C da una molla ideale di costante elastica mg/ℓ. Introdotte le coordinate s e ϑ indicate in figura, determinare l'energia cinetica e quella potenziale del sistema. Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio ordinarie e qualificare i modi normali corrispondenti ad una configurazione di equilibrio stabile.*



L'energia cinetica dell'asta OC che ruota attorno all'asse $\boldsymbol{e}_z$,passante per O, con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$ è

$$T_{OC} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathrm{I\!I}_O \boldsymbol{\omega} = \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2.$$

Se $\boldsymbol{e}_1$ è il versore parallelo a $B - O$ e $\boldsymbol{e}_2$ quello diretto come $O - C$, in modo che $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$, abbiamo $P - O = s\boldsymbol{e}_1$ e quindi

$$\boldsymbol{v}_P = \dot{s}\boldsymbol{e}_1 + s\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2.$$

Pertanto l'energia cinetica complessiva T è

$$T = T_{OC} + \frac{m}{2}v_P^2 = \frac{4}{3}m\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2 + s^2\dot{\vartheta}^2\right).$$

L'energia potenziale V del sistema è formata dal contributo della forza elastica $\frac{mg}{2\ell}(s^2+4\ell^2)$ e da quelli della forza peso: $-2mg\ell\sin\vartheta$ per l'asta OC, la sola dotata di massa non trascurabile, e $-mgs\cos\vartheta$, dovuto al punto P, cosicché

$$V = \frac{mg}{2\ell}(s^2 + 4\ell^2) - 2mg\ell\sin\vartheta - mgs\cos\vartheta.$$

Per trovare le configurazioni di equilibrio ordinarie risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{mg}{\ell}s - mg\cos\vartheta = 0 \\ \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = mgs\sin\vartheta - 2mg\ell\cos\vartheta = 0 : \end{cases}$$

dalla prima equazione si ricava la condizione $s = \cos\vartheta$ che, sostituita nella seconda, fornisce

$$mg\ell\cos\vartheta(\sin\vartheta - 2) = 0$$

che ammette le solutioni $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$, cui corrisponde sempre il valore $s = 0$. Le configurazioni (s, ϑ) di equilibrio sono dunque $E_1 \equiv (0, \frac{\pi}{2})$ e $E_2 \equiv (0, \frac{3\pi}{2})$. Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \frac{mg}{\ell} \\ \\ \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial \vartheta} = mg\sin\vartheta \\ \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = mgs\cos\vartheta + 2mg\ell\sin\vartheta \end{cases}$$

e dunque le matrici hessiane delle configurazioni di equilibrio sono

$$B(E_1) = mg\begin{pmatrix} \frac{1}{\ell} & 1 \\ 1 & 2\ell \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B(E_2) = mg\begin{pmatrix} \frac{1}{\ell} & -1 \\ -1 & -2\ell \end{pmatrix} :$$

$B(E_1)$ è definita positiva e dunque E_1 è una configurazione di minimo relativo isolato per V ed è stabile per il teorema di Dirichlet-Lagrange mentre $B(E_2)$ è indefinita e corrisponde ad un punto di sella di V, per cui E_2 è instabile, grazie al criterio di Ljapunov. Per procedere nell'analisi dei modi normali, troviamo la forma quadratica associata all'energia cinetica T: poiché, in $s = 0$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ si ha

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{s}^2} = m \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x} \partial \dot{\vartheta}} = 0 \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\vartheta}^2} = \frac{8}{3} m\ell^2$$

abbiamo

$$A(E_1) = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3}\ell^2 \end{pmatrix}.$$

Per trovare le pulsazioni delle piccole oscillazioni risolviamo l'equazione $\det(\lambda A - B(E_1)) = 0$, cioè

$$8\ell^2\lambda^2 - 14g\ell\lambda + 3g^2 = 0$$

che ha le radici $\lambda_1 = \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}$ e $\lambda_2 = \frac{g}{4\ell}$: le pulsazioni delle piccole oscillazioni sono

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}} \qquad \text{e} \qquad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{g}{4\ell}}.$$

Introdotti i vettori colonna

$$\boldsymbol{q}(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{q}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

il più generale moto approssimato in un intorno della configurazione di equilibrio stabile si scrive nella forma

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}^0 + \varepsilon[c_1(t)\boldsymbol{v}_1 + c_2(t)\boldsymbol{v}_2]$$

dove le funzioni $c_1(t)$ e $c_2(t)$ sono date da

$$c_1(t) = \alpha_1 \cos\omega_1 t + \beta_1 \sin\omega_1 t \qquad \text{e} \qquad c_2(t) = \alpha_2 \cos\omega_2 t + \beta_2 \sin\omega_2 t.$$

I vettori costanti $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ appartengono, rispettivamente ai nuclei di $(\lambda_1 A - B)$ e $(\lambda_2 A - B)$ per cui sono soluzioni di

$$(\lambda_1 A - B)\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0} \qquad \text{e} \qquad (\lambda_2 A - B)\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}.$$

Posto $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1s} \\ v_{1\vartheta} \end{pmatrix}$, la prima equazione diventa

$$mg \begin{pmatrix} \frac{1}{2\ell} & -1 \\ -1 & 2\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1s} \\ v_{1\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che impone la condizione $v_{1s} = 2\ell v_{1\vartheta}$. Posto $v_{1\vartheta} = 1$, abbiamo

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2\ell \\ 1 \end{pmatrix}$$

per cui il modo normale corrispondente è caratterizzato da

$$s(t) = 2\varepsilon\ell c_1(t) \qquad , \qquad \vartheta(t)\frac{\pi}{2} + \varepsilon c_1(t).$$

Operando similmente su $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{2s} \\ v_{2\vartheta} \end{pmatrix}$ e risolvendo l'equazione $(\lambda_2 A - B)\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$, cioè

$$mg \begin{pmatrix} -\frac{3}{4\ell} & -1 \\ -1 & -\frac{4}{3}\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{2s} \\ v_{2\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

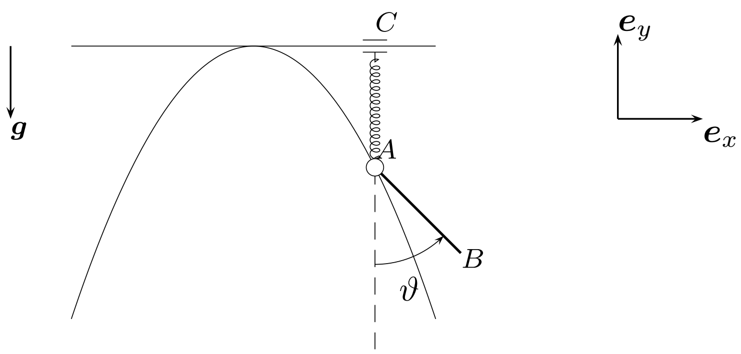
si ottiene la condizione $v_{2s} = -\frac{4}{3}v_{2\vartheta}$ e quindi

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}\ell \\ 1 \end{pmatrix}$$

per cui il modo normale corrispondente è

$$s(t) = -\frac{4}{3}\varepsilon\ell c_2(t) \qquad , \qquad \vartheta(t) = \frac{\pi}{2} + \varepsilon c_2(t).$$

Esercizio 5.6 *In un piano verticale, un'asta AB di massa $2m$ e lunghezza ℓ ha l'estremo A mobile su una parabola di equazione $y = -x^2/\ell$ e sollecitato da una forza elastica ideale di costante $2mg/\ell$ che lo attrae verso il punto mobile C dell'asse $\boldsymbol{e}_x$ posto sulla stessa verticale. Introdotte l'ascissa x di A (l'origine del riferimento cartesiano coincide con il vertice della parabola) e l'angolo ϑ indicato in figura, determinare l'energia cinetica e quella potenziale del sistema. Studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio e determinare le pulsazioni delle piccole oscillazioni in un intorno di una posizione di equilibrio stabile.*



Se G è il centro di massa di AB, l'energia cinetica dell'asta si scrive nella forma

$$T = mv_G^2 + \frac{1}{12}m\ell^2\dot{\vartheta}^2$$

e per calcolare $\boldsymbol{v}_G$ osserviamo che

$$G - O = x\boldsymbol{e}_x - \frac{x^2}{\ell}\boldsymbol{e}_y + \frac{\ell}{2}\boldsymbol{e}_1$$

dove O è il vertice della parabola ed $\boldsymbol{e}_1$ è il versore diretto come $B-A$, solidale all'asta che ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$. Grazie alle formule di Poisson abbiamo

$$\boldsymbol{v}_G = \dot{x}\boldsymbol{e}_x - 2\frac{x\dot{x}}{\ell}\boldsymbol{e}_y + \frac{\ell}{2}\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2,$$

dove $\boldsymbol{e}_2$ è il versore del piano di moto, ortogonale ad $\boldsymbol{e}_1$ ed orientato in modo che sia $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$. Osservando che l'angolo tra $\boldsymbol{e}_x$ ed $\boldsymbol{e}_2$ è ϑ, mentre quello tra $\boldsymbol{e}_y$ ed $\boldsymbol{e}_2$ è $\frac{\pi}{2} - \vartheta$, abbiamo

$$v_G^2 = \dot{x}^2 + 4\frac{x^2\dot{x}^2}{\ell^2} + \frac{\ell^2}{4}\dot{\vartheta}^2 - 2x\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta + \ell\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta$$

e dunque

$$T = m[\dot{x}^2 + 4\frac{x^2\dot{x}^2}{\ell^2} + \frac{m\ell^2}{3}\dot{\vartheta}^2 - 2x\dot{x}\dot{\vartheta}\sin\vartheta + \ell\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta].$$

L'energia potenziale consta di due contributi, dovuti alla forza di gravità ed alla forza elastica:

$$V = -2mg\left(\frac{x^2}{\ell} + \frac{\ell}{2}\cos\vartheta\right) + \frac{mg}{\ell^3}x^4$$

e le configurazioni di equilibrio ordinarie sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = 4\frac{mg}{\ell}x\left(\frac{x^2}{\ell^2} - 1\right) \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = mg\ell\sin\vartheta \end{cases}$$

e sono rappresentate dalle coppie ordinate (x, ϑ)

$$E_1 = (0,0) \quad E_2 = (0,\pi) \quad E_3 = (\ell,0) \quad E_4 = (\ell,\pi) \quad E_5 = (-\ell,0) \quad E_6 = (-\ell,\pi).$$

La matrice hessiana ha elementi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 4\frac{mg}{\ell}\left(3\frac{x^2}{\ell^2} - 1\right) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \vartheta} = 0 \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = mg\ell\cos\vartheta :$$

essendo sempre diagonale, si riconosce subito che le configurazioni E_2, E_4 ed E_6 hanno un autovalore negativo e l'altro positivo o negativo per cui sono instabili per il primo criterio di Ljapunov. Similmente, E_1 corrisponde ad un punto di sella di V ed è parimenti instabile. Quanto ad E_3 ed E_5, la forma hessiana è la stessa nei due casi e vale

$$B = \begin{pmatrix} 8\frac{mg}{\ell} & 0 \\ 0 & mg\ell \end{pmatrix}$$

che è definita positiva: le corrispondenti configurazioni di equilibrio sono dunque stabili. Studiamo i modi normali in un intorno di E_3. Poiché

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}^2} = 2m\left(1+4\frac{x^2}{\ell^2}\right) \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}\partial\dot{\vartheta}} = m(-2\sin\vartheta + \ell\cos\vartheta) \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\vartheta}^2} = \frac{2}{3}m\ell^2$$

la forma quadratica A associata in E_3, come pure in E_5, è

$$A = \begin{pmatrix} 10m & m\ell \\ m\ell & \frac{2}{3}m\ell^2 \end{pmatrix}$$

per cui l'equazione $\det(\lambda A - B) = 0$ è

$$17\ell^2\lambda^2 - 46g\ell\lambda + 24g^2\ell^2 = 0$$

che ammette le soluzioni

$$\lambda_1 = 2\frac{g}{\ell} \qquad \lambda_2 = \frac{12g}{17\ell}.$$

Per qualificare i modi normali, poniamo

$$\boldsymbol{q}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \vartheta(t) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{q}^0 = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \end{pmatrix}$$

cosicché il più generale moto approssimato in un intorno di E_5 si scrive come

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{q}^0 + \varepsilon[c_1(t)\boldsymbol{v}_1 + c_2(t)\boldsymbol{v}_2]$$

dove le funzioni $c_1(t)$ e $c_2(t)$ sono date da

$$c_1(t) = \alpha_1\cos\omega_1 t + \beta_1\sin\omega_1 t \qquad \text{e} \qquad c_2(t) = \alpha_2\cos\omega_2 t + \beta_2\sin\omega_2 t,$$

con $\omega_{1,2} = \sqrt{\lambda_{1,2}}$. Per trovare i vettori costanti $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ occorre risolvere

$$(\lambda_1 A - B)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \qquad \text{e} \qquad (\lambda_2 A - B)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}:$$

nel primo caso, l'equazione impone la restrizione

$$v_{1\vartheta}\ell = -6\ell v_{1x},$$

nel secondo caso essa impone

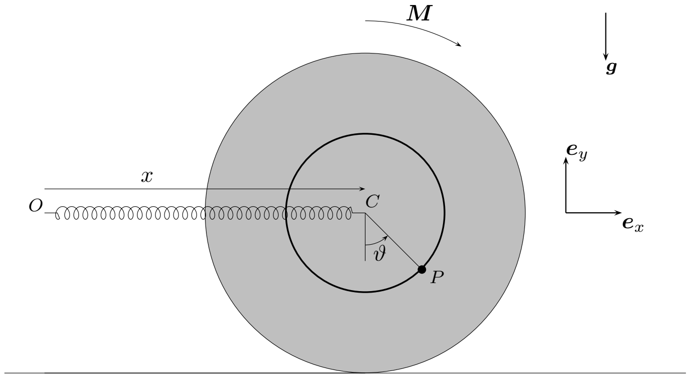
$$4v_{2x} = 3\ell v_{2\vartheta}:$$

posto $v_{1\vartheta} = v_{2\vartheta} = 1$ i modi normali corrsipondenti a λ_1 e λ_2 sono

$$x(t) = \ell - \frac{1}{6}\ell\varepsilon c_1(t) \qquad \vartheta(t) = \varepsilon c_1(t)$$

e

$$x(t) = \ell + \frac{3}{4}\ell\varepsilon c_2(t) \qquad \vartheta(t) = \varepsilon c_2(t).$$



Esercizio 5.7 *In un piano verticale, un disco di massa m e raggio R rotola senza strisciare su una guida orizzontale. Sul disco agisce una coppia costante $\boldsymbol{M} = -2mgR\boldsymbol{e}_z$ ed una forza elastica di costante mg/R che attrae il centro C del disco ad un punto fisso O posto alla stessa quota.*

Nel disco è praticata una scanalatura circolare concentrica di raggio $R/2$ entro cui è libero di muoversi senza attrito un punto materiale P di massa m. Usando le coordinate lagrangiane x e ϑ indicate in figura, trovare l'energia cinetica del sistema. Determinare le configurazioni di equilibrio discutendone la stabilità. Determinare la frequenza delle piccole oscillazioni in un intorno della configurazione di equilibrio stabile.

La velocità angolare del disco, in virtù del vincolo di puro rotolamento, è $\boldsymbol{\omega} = -\frac{\dot{x}}{R}$ per cui, grazie al teorema di König, il contributo del disco all 'energia cinetica del sistema è $\frac{3}{4}m^2\dot{x}^2$. Il contributo del punto P si ottiene scrivendo

$$P - O = x\boldsymbol{e}_x + \frac{R}{2}\boldsymbol{e}_1,$$

dove $vers_1$ è il versore associato a $P - C$. Introdotto il versore $\boldsymbol{e}_2$, ortogonale ad $\boldsymbol{e}_1$ e tale che $\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$, siccome la base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ ruota con velocità angolare $\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_z$, grazie alle formule di Poisson abbiamo

$$\boldsymbol{v}_P = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \frac{R}{2}\dot{\vartheta}\boldsymbol{e}_2$$

per cui, siccome $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_2 = \cos\vartheta$, abbiamo

$$v_P^2 = \dot{x}^2 + \frac{R^2}{4}\dot{\vartheta}^2 + R\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta$$

e quindi l'energia cinetica totale del sistema è

$$T = \frac{5}{4}m\dot{x}^2 + m\frac{R^2}{8}\dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{2}R\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\vartheta.$$

All'energia potenziale V contribuiscono in modo non banale la forza elastica, con un contributo $\frac{mg}{2R}x^2$, la forza peso agente su P, con contributo $-mg\frac{R}{2}\cos\vartheta$, dove si è presa l'orizzontale per O e C come quota di riferimento, e la coppia costante, il cui contributo è, a meno di costanti additive $-2mgx$; abbiamo pertanto

$$V = \frac{mg}{2R}x^2 - 2mgx - mg\frac{R}{2}\cos\vartheta.$$

Le configurazioni di equilibrio ordinarie risolvono il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = mg\left(\frac{x}{R} - 1\right) = 0 \\ \\ \frac{\partial V}{\partial \vartheta} = mg\frac{R}{2}\sin\vartheta = 0 \end{cases}$$

che ammette come soluzioni le coppie ordinate (x, ϑ) date da $E_1 \equiv (R, 0)$ ed $E_2 \equiv (R, \pi)$. Le corrispondenti matrici hessiane $B(E_1)$ e $B(E_2)$ sono

$$B(E_1) = \begin{pmatrix} \frac{mg}{R} & 0 \\ 0 & mg\frac{R}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B(E_2) = \begin{pmatrix} \frac{mg}{R} & 0 \\ 0 & -mg\frac{R}{2} \end{pmatrix}:$$

la prima ha autovalori positivi per cui V ha in E_1 un punto di minimo relativo e questa configurazione è stabile nel senso di Ljapunov mentre la seconda ha autovalori di segno opposto per cui V ha un punto di sella in E_2 che risulta instabile, in virtù del criterio di instabilità di Ljapunov. Iniziamo a studiare i modi normali in un intorno di E_1. La forma quadratica associata all'energia cinetica è

$$A(E_1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}m & m\frac{R}{2} \\ m\frac{R}{2} & m\frac{R^2}{4} \end{pmatrix}$$

e l'equazione $\det(\lambda A - B) = 0$ è

$$3\lambda^2 R^2 - 12\lambda g R + 4g^2 = 0$$

che ha per radici $\lambda_1 = \frac{2}{3}(3 + \sqrt{6})$ e $\lambda_2 = \frac{2}{3}(3 - \sqrt{6})$.