Capitolo 4

Equazioni di terzo e quarto grado

4.1 Problemi di terzo grado nella matematica greca

I matematici greci affrontatono alcuni problemi di terzo grado: il problema della duplicazione del cubo, la trisezione di un angolo ed il cosiddetto problema complementare di Archimede, cioè la suddivisione di una sfera con un piano in due parti i cui volumi hanno un rapporto assegnato, per il quale rimando al testo di Maracchia [1] (pp. 193-200).

Il problema della duplicazione del cubo consiste nel determinare, assegnato un segmento di lunghezza a un segmento tale che il cubo costruito su di esso abbia volume doppio del cubo costruito sul primo. In altre parole, occorre determinare la risoluzione dell'equazione

$$x^3 = 2a^3 .$$

La difficoltà del problema risiede nel fatto che esso andava risolto con riga e compasso soltanto e l'impossibilità di raggiungere questo risultato venne dimostrata solo nel 1837 da Pierre Laurent Wantzel. Rinunciando a questo vincolo, il problema fu affrontato e risolto da Menecmo di Proconneso (∼380 a.C.-∼320 a.C.) grazie alle proprietà delle coniche, nel caso specifico, delle parabole. Il metodo seguito da Menecmo verrà detto da Pappo *zeetetico*, cioè a dire, "supposto fatto" con un termine che verrà riutilizzato molto più tardi da Viète. L'osservazione iniziale è quella di Ippocrate di Chio, vissuto tra il 470 ed il 410 a.C. che trasformò il problema della duplicazione del cubo in quello dell'inserzione di due medi proporzionali tra due segmenti AB e BC assegnati e tali che $AB = 2BC$. Infatti, se i segmenti BE e BD sono questi medi proporzionali, per cui si ha

$$AB : BE = BE : BD = BD : BC, \tag{4.1}$$

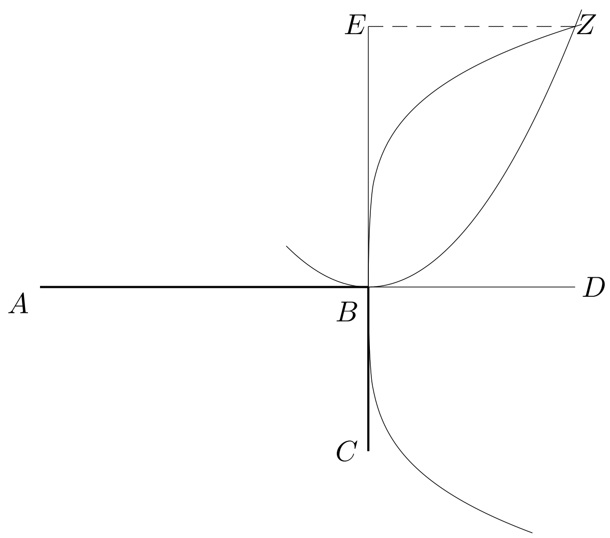

Figura 4.1: Procedimento zetetico seguìto da Menecmo per la risoluzione geometrica del problema della duplicazione del cubo.

e dunque

$$BE = \frac{BD \times BD}{BC}$$

che, sostituito nella proporzione $AB : BE = BE : BD$ permette di dimostrare che $BD^3 = 2BC^3$, servendosi del fatto che $AB = 2BC$. La soluzione di Menecmo poggia sulla proprietà della parabola di vertice V di essere il luogo dei punti M tali che

$$MN^2 = 2pVN$$

dove N è la proiezione di M sull'asse della parabola mentre $2p$ è una costante detta *parametro* della parabola e rappresenta la distanza del fuoco dalla direttrice della parabola: per una discussione sul modo in cui questa proprietà poteva essere dedotta anticamente, si può vedere p. 189 di [1]. Il procedimento di Menecmo consiste nel supporre di avere trovato i medi proporzionali tra AB e BC che figurano in (4.1) e di disporre i segmenti AB, BC, BE, BD come in Fig. 4.1. Da (4.1) segue che

$$BE^2 = AB \times BD$$

che si può interpretare dicendo che, condotta la parallela a BE passante per D, il punto Z su di essa tale che $ZD = BE$ appartiene alla parabola di vertice B, asse BD e parametro AB. Se ora da Z si conduce la parallela a BD e si osserva che, ancora grazie a (4.1),

$$BD^2 = ZE^2 = BC \times BE$$

si conclude che Z appartiene anche alla parabola di vertice B, asse BE e parametro BC. Il procedimento viene ora invertito: si dispongono i segmenti noti AB e BC ortogonalmente e si considerano le due parabole, entrambe di vertice B, di assi AB e BC e parametri pari alle lunghezze di questi segmenti. Il punto Z comune ad esse e distinto dal vertice B risolve il problema in quanto le sue proiezioni sui prolungamenti di AB e BC soddisfano (4.1), per la proprietà discussa sopra delle parabole.

4.2 Problemi di terzo grado in Diofanto

Il matematico greco che giunse più vicino di tutti ad ottenere la formula risolutiva per le equazioni di terzo grado fu Diofanto di Alessandria nella cui *Arithmetica* si trovano formulati problemi come i seguenti:
IV.1 *Dividere un numero dato in due cubi di cui è data la somma delle radici.*
IV.2 *Trovare due numeri tali che la loro differenza formi un numero dato e sia data anche la differenza dei loro cubi.*

Detti x ed y i numeri richiesti, questi problemi si formulano rispettivamente come

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = a \\ x + y = b \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x - y = a \\ x^3 - y^3 = b \end{cases}$$

Anche se Diofanto considera casi numerici e non inserisce i parametri a e b, il suo metodo è del tutto generale e si può riassumere in questi termini: facendo riferimento al Problema IV.1 egli utilizza il vincolo $x + y = b$ per ridursi a trattare una sola variabile ponendo

$$x = t + \frac{b}{2} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{b}{2} - t$$

che, sostituite nella prima equazione, la trasformano in un'equazione di secondo grado per t:

$$3bt^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)^3 = a$$

da cui si ottiene subito

$$t = \sqrt{\frac{a}{3b} - \frac{b^2}{12}}$$

che permette di ricavare i valori di x ed y come

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a}{3b} - \frac{b^2}{12}}, \qquad y = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{a}{3b} - \frac{b^2}{12}}.$$

In capitolo precedenti dell'*Arithmetica* Diofanto aveva presentato problemi di secondo grado riconducibili al sistema

$$\begin{cases} x^2 \pm y^2 = a \\ x \pm y = b \end{cases}$$

cui facevano seguito altri problemi in cui occorreva determinare due numeri conoscendone la somma ed il prodotto. Bachet de Mézierac, editore dell'edizione del 1621 dell'*Arithmetica* diofantea congetturò che fossero andate perdute le soluzioni di problemi del tipo

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = q \\ xy = p \end{cases}$$

che possono risolversi con tecniche del tutto analoghe a quella impiegata da Diofanto per problemi di secondo grado. Infatti, posto

$$x^3 = \frac{q}{2} + t \qquad y^3 = \frac{q}{2} - t$$

si otterrebbe

$$p^3 = (xy)^3 = \frac{q^2}{4} - t^2$$

e dunque

$$t = \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^3}$$

da cui si può ottenere

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^3}} \qquad y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^3}}.$$

D'altra parte, utilizzando l'identità

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y),$$

la variabile

$$u := x + y$$

soddisfa l'equazione

$$u^3 - 3pu = q$$

che, inserendo i valori per x ed y trovati prima, è risolta da

$$u = x + y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^3}}$$

che rappresenta un esempio di formula risolutiva di equazioni di terzo grado.

Tutto questo rimane una interessante congettura ma resta il fatto che Rafael Bombelli, che divulgò per primo in Occidente l'opera di Diofanto, ebbe una analoga sensazione anche a proposito delle equazioni di quarto grado al punto da affermare

Capitolo di potenza di potenza e tanti eguale a numero. Dopo ch'io viddi l'opera di Diofante sempre sono stato di opinione che tutto il suo intento sino a quei giorni fosse di venire a questa agguagliazione, perché si vede che camina a *una strada di trovare sempre numeri quadrati e che aggiontoli qualche numero siano quadrati et credo che li sei libri che mancano fussero di questo agguagliamento, nel fine; è ben vero che me ne fa stare alquanto in dubbio che giamai [Diofanto] opera R. q. [radici quadrate] né so che me ne dire, se non che noi restiamo privi, per la malvagità del tempo distruggitor del tutto, il quale ha fatto perdere suddetti sei libri, di una bella e maggior parte di questa disciplina. Ma Ludovico Ferrari nostro Cittadino anco egli caminò per questa via et trovò l'uso d'agguagliare simili capitoli, la quale fu invenzione bellissima.* (Algebra; in [1], pp. 206-208)

4.3 Problemi di terzo grado in Omar KHAYYAM ed in matematici arabi

Il matematico, astronomo e poeta persiano Omar Khayyam affronta diversi problemi di terzo grado nella sua *Algebra* ottenendone soluzioni geometriche che però non permettono di approdare ad un procedimento generale. In questo senso, possono essere visti come sofisticati esercizi di algebra geometrica e si riallacciano al filone geometrico di sviluppo dell'algebra che, priva di un efficace formalismo cioè di un sufficiente grado di aritmetizzazione, si appoggia alla geometria per dimostrare gli enunciati dei suoi teoremi. Per questo egli si colloca in controtendenza rispetto ai matematici arabi suoi contemporanei. I manoscritti di Khayyam furono tradotti in Occidente da Franz Woepcke (1826-1864) solo nel 1851 quando l'algebra in Europa aveva ormai raggiunto livelli decisamente superiori a quello peraltro notevole del matematico persiano. Khayyam considera diciannove casi di equazioni di terzo grado, trinomie e quadrinomie ed è ancorato alla positività delle soluzioni per cui in qualcuno dei casi esaminati afferma che manca la soluzione. Consideriamo due esempi seguendo la presentazione di Maracchia ([1], p.218–225)

Per ridurre di grado l'equazione

$$x^3 + ax^2 = bx \tag{4.2}$$

al-Khayyam costruisce un cubo di lato x e ne prolunga uno spigolo di un segmento lungo a, giustapponendo al cubo un parallelepipedo di altezza a e base quadrata di lato x: il parallelepipedo complessivo ha volume $x^3 + ax^2$, cioè pari al membro di sinistra dell'equazione da risolvere. Al-Khayyam considera separatamente un rettangolo di area b e che fa da base ad un parallelepipedo di altezza x che ha dunque per volume bx, il membro di destra di (4.2). I due solidi così ottenuti hanno dunque lo stesso volume ed avendo la stessa altezza x anche le basi b e $x^2 + ax$ debbono coincidere per cui la soluzione di (4.2) si riduce a quella di

$$x^2 + ax = b.$$

Più articolata è invece la discussione di equazioni non riducibili immediatamente a quelle di secondo grado, riportate nel capitolo VI dell'*Algebra*. Consideriamo

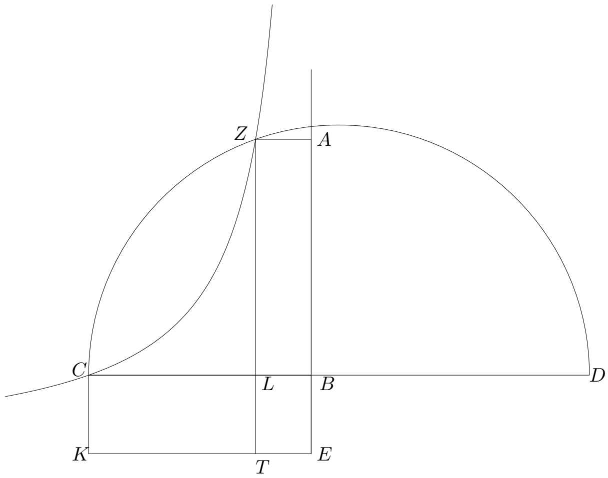

Figura 4.2: Risoluzione geometrica dell'equazione di terzo grado $x^3+ax^2+bx=c$ in al-Khayyam. Solo la soluzione positiva è ottenuta con questo procedimento.

l'equazione completa

$$x^3 + ax^2 + bx = c, \tag{4.3}$$

con a, b e c positivi e indichiamo (Fig. 4.2) con BE un segmento tale che il quadrato costruito su di esso abbia area b: $BE^2 = b$; si costruisca un parallelepipedo a base quadrata, di area BE^2 ed altezza BC tale che il suo volume sia c: $BE^2BC = c$. Infine, sul prolungamento di CB si riporti il segmento $BD = a$. Con riferimento alla Figura 4.2 si consideri la semicirconferenza di diametro CD e si completi il rettangolo $BCKE$. Si tracci l'iperbole equilatera passante per C ed avente per asintoti le rette su cui giacciono EK ed il segmento AB, ortogonale a CD. Detto Z l'ulteriore punto di intersezione tra la semicirconferenza e l'iperbole, per una proprietà di quest'ultima i rettangoli EZ e EC sono equivalenti e dunque lo sono anche i rettangoli BZ ed KL, ottenuti dai precedenti eliminando il rettangolo EL comune. L'equivalenza tra BZ e KL si può tradurre nella proporzione

$$LZ : CL = BE : BL$$

e, passando ai quadrati,

$$LZ^2 : CL^2 = BE^2 : BL^2.$$

Dal secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo CZD si ha $CL : LZ = LZ : DL$ che, inserita nella proporzione precedente permette di ottenere

$$DL : CL = BE^2 : BL^2$$

che, scritta nella forma $BE^2 \times CL = BL^2 \times DL$, si può interpretare come un'eguaglianza tra volumi. Siccome $CL = BC - BL$ e $DL = BD + BL$ questa uguaglianza si riscrive come

$$BE^2 \times BC - BE^2 \times BL = BL^3 + BL^2 \times BD$$

che, sostituendo le posizioni iniziali $BE^2 = b$, $BE^2 \times BC = c$ e $BD = a$, diventa

$$BL^3 + aBL^2 + bBL = c$$

che dimostra come il segmento BL risolva l'equazione (4.3).

Un altro risultato degno di nota fu ottenuto dal matematico Sharaf al-Tusi (∼1135-∼1213) che determinò una condizione perché le radici di un'equazione cubica fossero positive e che troveremo più volte discussa a partire dal XVI secolo. Presa l'equazione

$$x^3 + a = bx$$

con a e b entrambi positivi, si suppone che x_1 sia una radice *positiva* per cui

$$x_1^3 + a = bx_1$$

e si osserva che $x_1^3 < bx_1$, ovvero che per eventuali radici positive vale la limitazione

$$x_1 < \sqrt{b}\,.$$

D'altra parte, al-Tusi osserva che il valore massimo di $bx - x^3$ si ottiene per $x = \sqrt{b/3}$ per cui conclude che

$$a \leq b\sqrt{b/3} + \left(\sqrt{b/3}\right)^3 = \frac{2b}{3}\sqrt{b/3}$$

e dunque $a/2 \leq b/3\sqrt{b/3}$ o

$$\frac{a^2}{4} \leq \frac{b^3}{27},$$

è condizione necessaria affinché le radici dell'equazione proposta siano reali e positive. Questo processo di al-Tusi si inquadra nel filone di sviluppo dell'algebra legato alla sua aritmetizzazione. Ad al-Tusi è attribuita l'osservazione che, nota una radice di un'equazione, se ne può abbassare il grado.

Il legame tra la trisezione di un angolo e certe equazioni cubiche si trova nel matematico, probabilmente persiano, al-Biruni (973-1048) che risolse in forma retorica le equazioni

$$x^3 = 3x + 1 \qquad \text{e} \qquad x^3 + 3x = 1$$

fornendo, senza spiegazioni, il valore numerico delle radici reali con notevole precisione. Per la soluzione della prima equazione trattata da al-Biruni seguiamo l'esposizione di Maracchia ([1], pp. 212-213) che riprende la ricostruzione proposta da Johannes Troepfke. Si consideri un *ennagono* regolare di lato unitario, inscritto in una circonferenza (Figura 4.3) e si considerino le diagonali DB, HA e DG tali che gli angoli alla circonferenza BDG, GDH, HAB e DHA sono

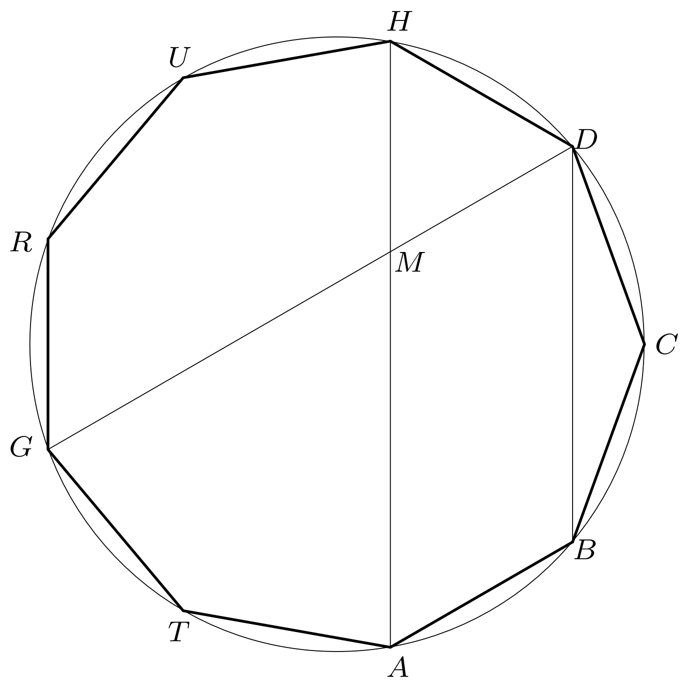

Figura 4.3: Il legame tra la trisezione di un angolo e le equazioni di terzo grado.

uguali tra loro perché sottendono un arco di ampiezza tripla rispetto a quelli sottesi dai lati uguali dell'ennagono.

Poiché un angolo interno di un ennagono regolare ha ampiezza $7\pi/9$ e dunque gli angoli alla base del triangolo isoscele CBD hanno ampiezza $\pi/9$ si conclude che l'ampiezza comune di BDG, GDH, HAB e DHA è di $\frac{\pi}{3}$. In particolare, il triangolo DHM è equilatero e le coppie di rette BD ed AH, AB e GD sono parallele a due a due: in particolare $ABDM$ è un parallelogramma e $DM = AB = 1$. Occorre ora richiamare un teorema di geometria euclidea, il teorema di Tolomeo (*cfr.* Appendice 4.10), in base al quale in un quadrilatero inscritto in una circonferenza la somma delle aree dei rettangoli formati da coppie di lati opposti coincide con l'area del rettangolo che ha per lati le diagonali del quadrilatero stesso. Considerando allora i quadrilateri $ABDH$ e $ABCD$ si ottiene

$$AH \times BD + AB \times DH = AD \times BH$$

e

$$AD \times CB + CD \times AB = AC \times DB$$

che, se si pone $BD = x = AM = AC$, equivalgono a

$$(1 + x)x + 1 = AD^2 \qquad \text{e} \qquad AD + 1 = x^2$$

da cui segue, eliminando AD,

$$x^3 = 3x + 1.$$

Ritroveremo uno studio del legame tra equazioni cubiche e trisezione di un angolo con Bombelli.

4.4 Problemi di terzo grado nel Medioevo

Leonardo Pisano (1180 ca-1250), più noto come Fibonacci, figlio di Bonaccio, fu una delle figure di primo piano della matematica occidentale medievale e svolse un ruolo essenziale nella divulgazione dei progressi ottenuti dagli arabi in algebra in un momento in cui il dominio arabo mostrava segni di cedimento. In questa sezione ci occupiamo di un risultato presente in un opuscolo di Fibonacci, il *Flos*, ritrovato insieme ad altre sue opere nella Biblioteca Ambrosiana di Milano dal principe Baldassarre Boncompagni, cultore di storia della matematica, e pubblicato nel 1862 nel volume II degli scritti di Fibonacci. In quest'opera viene descritta un'equazione di terzo grado la cui soluzione era stata proposta a Fibonacci da Giovanni da Palermo, filosofo alla corte di Federico II di Svevia, attorno l'anno 1225. L'equazione, nella formulazione retorica impiegata, viene espressa in questi termini

Si trovi un certo numero cubo che, insieme a due suoi quadrati e a dieci radici è uguale a 20.[1] (*cfr.* [2], p. 47)

[1] *Ut inveniretur quidam cubus numerus, qui cum suis duobus quadratis et decem radicibus in unum collectis essent viginti.*

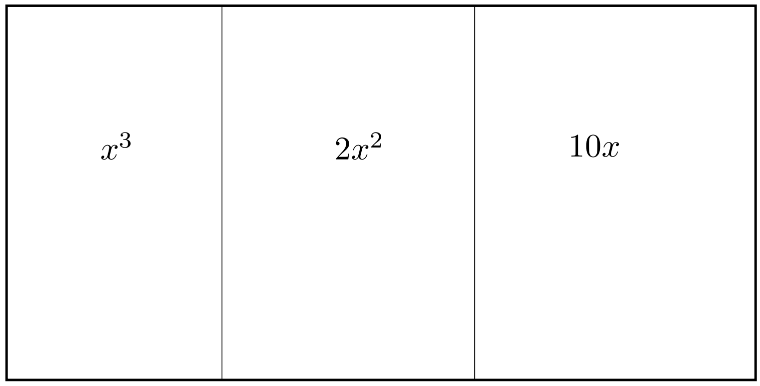

Figura 4.4: Argomento geometrico usato da Fibonacci per mostrare che la radice positiva dell'equazione $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ deve essere minore di 2.

In formule, l'equazione proposta a Leonardo Pisano è

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20 \tag{4.4}$$

e il *Flos* è interessante per almeno due motivi. Anzitutto per il modo con cui l'autore esamina la natura delle radici anche se si limita a considerare tali solo numeri positivi, contrariamente a quanto aveva fatto in altri problemi presenti nel *Liber Abaci* del 1202. Inoltre, Fibonacci fornisce il valore *numerico* dell'unica radice positiva con una precisione ragguardevole in quanto l'errore è sull'undicesima cifra decimale. Purtroppo egli non ha fornito indicazioni sul metodo di approssimazione seguito, lasciando spazio agli storici per varie ricostruzioni. Appare plausibile [4] che egli si sia servito della regola di doppia falsa posizione (*regula duorum falsorum positionum*) cui aveva dedicato il capitolo XIII del *Liber abaci*, riferendosi ad essa con il termine arabo corrispondente *elchatayn* che deriva da *alkhat'ayni*: letteralmente, due errori. Fibonacci parte con l'escludere che la soluzione possa essere un numero naturale. Infatti, $x = 1$ non risolve l'equazione, come si verifica direttamente e per escludere gli altri interi adduce un argomento geometrico che dimostra come la soluzione reale dell'equazione non possa essere maggiore di 2. Egli allora considera (Fig. 4.4) un rettangolo di area $10x$, base x ed altezza 10 e vi applica altri due rettangoli che, a parità di altezza, hanno aree x^3 e $2x^2$. Ottiene dunque un rettangolo che ha area complessiva $x^3 + 2x^2 + 10x$ ed altezza 10. Se x è radice di (4.4), l'area ottenuta deve essere anche uguale a 20 per cui la base del rettangolo costruito per passi deve essere pari a 2 che quindi è maggiore di x.

Fibonacci riesce a mostrare che la radice non può essere razionale per poi escludere che essa rientri in una delle categorie di radicali quadratici che Euclide aveva esaminato esaurientemente nel libro X degli *Elementi*. Ad esempio, non può essere della forma $\sqrt{n}$ con n intero non quadrato perché, riscritta l'equazione

nella forma
$$\frac{2x^2}{10} = 2 - \left(x + \frac{x^3}{10}\right)$$
si avrebbe a sinistra la quantità razionale $2n/10$ e a destra la quantità irrazionale $2 - \sqrt{n}\left(1 + \frac{n}{10}\right)$ che Euclide aveva chiamato *apotome*. Neppure $x = \sqrt[4]{n}$ può rappresentare una radice perché ricombinando i termini di (4.4) in modo da scrivere
$$x + \frac{x^3}{10} = 2 - \frac{2x^2}{10}$$
si otterrebbe a sinistra la quantità $\sqrt[4]{n} + \frac{\sqrt[4]{n}\sqrt{n}}{10}$ che Euclide aveva chiamato (*Elementi*, X.38) prima *mediale* mentre a destra si ottiene l'apotome $2 - \frac{2\sqrt{n}}{10}$ che è impossibile in quanto Euclide aveva dimostrato l'incommensurabilità di tali quantità. In successione, e con argomenti *geometrici* —quelli riportati sono ripresi dalla versione moderna di Woepcke [3]—Fibonacci può concludere che la soluzione reale di (4.4) è un numero irrazionale ma di natura *diversa* da quelli classificati da Euclide, il che porta naturalmente a cercare espressioni in termini di radici cubiche. Osserviamo un'altra caratteristica degli argomenti geometrici di Leonardo Pisano. Egli considera x^3, $2x^2$ e $10x$ come *aree*, liberandosi del principio di omogeneità dimensionale che invece vorrebbe trattare x come lunghezza ed attribuire al coefficiente 10 il significato di area. Come già visto nel Capitolo 1, oltre tre secoli dopo Fibonacci, François Viète aderirà ancora fermamente al principio di omogeneità.

Per concludere questo breve cenno al periodo medievale, voglio ricordare un algebrista italiano del XIV secolo, Maestro Dardi da Pisa nel cui volume *Aliabraa argibra* (1344) si trova, senza dimostrazione, la soluzione di una classe di equazioni cubiche complete
$$x^3 + bx^2 + cx = n \tag{4.5}$$
nella forma
$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{c}{b}\right)^3 + n} - \frac{c}{b}.$$
Una ipotesi sul modo in cui Maestro Dardi possa aver ottenuto questa formula risolutiva è stata avanzata da van der Waerden ([5], pp. 48-49). L'idea è l'estensione a tre dimensioni della tecnica di completamento del quadrato, già incontrata sotto più angolazioni nella risoluzione delle equazioni di secondo grado. Alla formula algebrica di sviluppo del cubo di un binomio
$$(x + L)^3 = x^3 + 3x^2L + 3xL^2 + L^3$$
è possibile dare una veste geometrica (Fig. 4.5) interpretando x^3 ed L^3 come volumi di due cubi di lato x ed L, rispettivamente, x^2L come volume di un parallelepipedo di base quadrata di lato x ed altezza L e xL^2 come volume di un parallelepipedo di base quadrata di lato L ed altezza x. Allora, la formula precedente asserisce che un cubo di lato $x + L$ è scomponibile in un cubo di lato L, uno di lato x, in tre parallelepipedi di lati x, x ed L ed altri tre di lati x, L

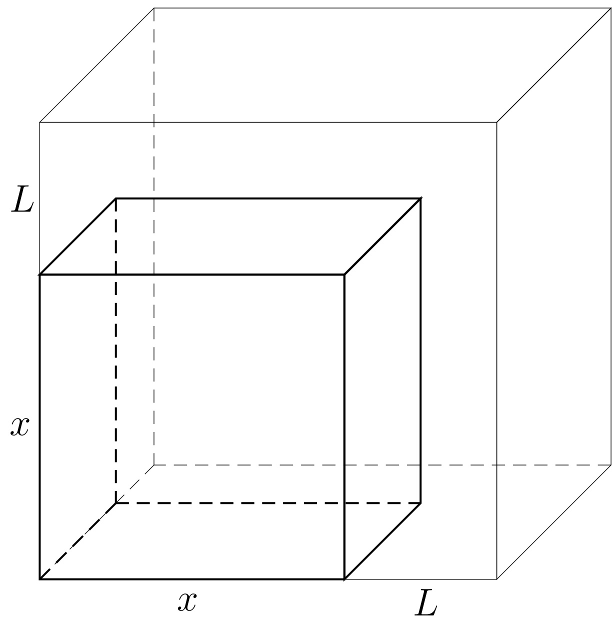

Figura 4.5: Scomposizione di un cubo di lato $x + L$ (a tratto sottile). Il cubo a tratto spesso ha lato x.

ed L. A differenza del completamento del quadrato, il completamento del cubo pone più vincoli. Infatti, è sempre possibile aggiungere in ambo i membri di (4.5) il termine L^3 ma i coefficienti b e c debbono soddisfare le relazioni $c = 3L^2$ e $b = 3L$ e dunque deve essere $c/b = L$ perché il membro di sinistra sia un cubo. Tutti i casi presentati da Maestro Dardi ricadono precisamente in questa classe.

4.5 La formula risolutiva delle equazioni di terzo grado

Affrontare la storia delle equazioni di terzo grado e delle vicende legate alla formula risolutiva ci porta nell'Italia del XVI secolo. Infatti, la formula risolutiva per queste equazioni è ancora presentata come formula *cardanica* in omaggio allo scienziato pavese Gerolamo Cardano (1501-1576) che per primo la pubblicò nella *Ars Magna* che vide la luce nel 1545. Qui tuttavia Cardano riconosce subito (Cap. I) di non essere stato il primo a raggiungere questo risultato ma che la primazia va riconosciuta al bolognese Scipione dal Ferro (1465-1526), almeno per quanto riguarda *il capitolo di cubo e cose uguali a numero*, cioè a dire delle equazioni del tipo $x^3 + px = q$, dove p e q sono numeri positivi. Vedremo in quale modo è plausibile che dal Ferro sia giunto alla sua soluzione, così come tratteremo della velenosa polemica che vide contrapposti Nicolò Fontana (detto il Tartaglia, ca. 1500-1557) e Ludovico Ferrari (1522-1567), allievo di Cardano, polemica nata dalle accuse di Tartaglia secondo cui Cardano, dopo essersi fatta svelare la regola per risolvere le equazioni di terzo grado dietro solenne giuramento di non pubblicarla, avrebbe violato il giuramento con la pubblicazione dell'*Ars Magna*, obbligando Tartaglia a pubblicare l'anno successivo le *Questioni et inventioni diverse* (1546) dove, tra l'altro, il matematico bresciano presenta una dettagliata ma parziale storia delle sue scoperte, delle dispute e dove appunto riferisce del presunto tradimento di Cardano.

Scipione del Ferro, che per un certo periodo ebbe Albrecht Dürer come studente di prospettiva, fu un rappresentante della ricca scuola matematica di Bologna, una delle sedi universitarie più prestigiose dove, nel XVI secolo, passarono personaggi come Luca Pacioli, Niccolò Copernico, lo stesso Cardano, Ludovico Ferrari, fino a Rafael Bombelli la cui *Algebra* ebbe molta influenza anche su studiosi stranieri come Wallis e Leibniz. La scoperta di Dal Ferro ebbe un forte impatto emotivo agli occhi dei matematici contemporanei: Cardano si esprime in questi termini

Il bolognese Scipione del Ferro risolse il capitolo di cubo e cose uguali a numero e ciò fu senza dubbio qualcosa di bello e degno di ammirazione; quest'arte, dono davvero celeste, supera di tanto ogni sottigliezza umana, ogni risultato dell'ingegno umano, prova sublime di virtù degli animi e tanto illustre al punto che chi sarà giunto ad essa potrà credere di comprendere tutto.[2] (*Ars Magna*, Cap. I)

La scoperta di Dal Ferro abbatteva un confine che pochi anni prima Pacioli riteneva invalicabile e rappresentava il primo caso in cui la nuova civiltà riusciva a *superare* i risultati della scienza classica antica, guadagnando una coscienza dei propri mezzi che, non a caso, avrebbe originato l'intenso sviluppo della matematica nel XVI e XVII secolo. Così si esprimeva più di un secolo fa, nel 1894, Zeuthen nel suo *Tartalea contra Cardanum*:

Per conseguire quella confidenza nelle proprie forze tanto necessaria per servirsene al meglio, mancava l'incoraggiamento che viene dal sapersi capaci di trovare qualcosa che era sconosciuto ai maestri venerati. Ecco perché la scoperta della risoluzione delle equazioni di terzo grado, nella prima metà del XVI secolo, fornisce il segnale di partenza di uno sviluppo nuovo e rapido di tutti i settori della matematica pura ed applicata. Basta citare Viète, Galileo, Keplero, Nepero, Fermat e Descartes, per ricordare la molteplicità di direzioni e la grande importanza di questo nuovo sviluppo.

La storia della scoperta della risoluzione delle equazioni cubiche ha dunque un grande interesse. Distinguendo il diritto di priorità dei diversi autori si ha l'opportunità di giudicare allo stesso tempo il valore dei diversi contributi indiretti a questa soluzione che sono stati anche contributi essenziali ai progressi successivi. [3] (*cfr.* [6], p. 152)

---

[2] *Scipio Ferreus bononiensis capitulum cubi et rerum numero aequalium invenit rem sane, pulchram et admirabilem; cum omnem humanam subtilitatem, omnis ingenij mortalis claritatem ars haec superet, donum profecto celeste, experimentum antem virtutis animorum, atque adeo illustre, ut, qui haec attigerit, nihil non intelligere posse se credat.*

[3] *Pour gagner la confiance en ses propres forces, confiance si nécessaire pour les rendre bien disponibles, il fallait l'encouragement de se voir capable de trouver quelque chose qui fut*

Abbiamo visto nel capitolo precedente alcuni problemi di terzo grado risolti con metodo geometrico da vari matematici dell'antichità. È lecito domandarsi se alcuno di quei procedimenti abbia potuto esercitare un qualche influsso sugli algebristi italiani del XVI secolo. La questione fu al centro del lavoro di Ettore Bortolotti [6] che, dall'analisi di manoscritti in possesso dell'Università di Bologna, concludeva come il momento cruciale della *invenzione* della formula risolutiva da parte di dal Ferro fosse l'estensione dell'analisi dei radicali quadratici effettuata da Euclide nel libro X degli *Elementi* ai radicali cubici, seguendo la via battuta parzialmente da Fibonacci. Un'altra possibile interpretazione, avanzata da Giorgio Vacca vede come possibile via l'estensione a radicali cubici della formula dei radicali doppi

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}$$

Una terza via, presentata da Maracchia (pp. 240-241 [1]), parte dalla constatazione che può essere naturale cercare soluzioni dell'equazione

$$x^3+px=q \tag{4.6}$$

in termini di radicali cubici, e pertanto si può immaginare che Dal Ferro abbia tentato dapprima ponendo $x=\sqrt[3]{a}$ senza ottenere risultati significativi; $x=a\pm\sqrt[3]{b}$, che genera equazioni più complicate di quella di partenza e, infine, $x=\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$. Posto infatti $x=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ in (4.6) si ricava

$$a-(3\sqrt[3]{ab}-p)(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})-b=q$$

che, scelti a e b in modo che

$$3\sqrt[3]{ab}=p,$$

rende l'equazione equivalente al sistema

$$\begin{cases} ab=\frac{p^3}{27} \\ \\ a-b=q \end{cases}$$

che si può formulare come problema di trovare due numeri, a e $-b$ di cui sia assegnata la somma q ed il prodotto $-p^3/27$ e pertanto ricondotto alla soluzione di un'equazione di secondo grado, come osservò Tartaglia nei *Quesiti et Invenzioni diverse*, Quesito 34. Il risultato è

$$a=\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \qquad b=\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

---

inconnu aux maitres vénérés. Voila ce qui explique comment la découverte de la résolution des équations du troisième degré, dans la première moitié du XVI siecle, donna le signal d'un dévéloppement nouveau et rapide de toutes les branches des mathématiques pures et appliquées. Il suffit de citer les Viètes, les Galiles, les Keppler, les Néper, les Fermats, et les Descartes, pour rappeler la diversité des diréctions de ce nouveau développement et sa grande importance.

L'histoire de la découverte de la résolution des équations cubiques a donc un grand intérêt. En y desentant le droit de priorité des divers auteurs, on a lieu de juger en même temps de la valeur des differentes contributions indirectes à cette resolution, qui etaient aussi des contributions essentielles aux progrès ulterieurs.

da cui si deduce

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{4.7}$$

In alcune note di Pompeo Bolognetti († 1568), studente a Bologna, esaminate da Bortolotti si trova proprio questa soluzione descritta verbalmente ([6], pp. 157-158)

Dil cavaliero Bolognetti lui l'hebbe da messer Sipion dal Ferro vecchio bolognese. Il Capitolo di cose e cubo eguale a numero. (i.e. $ax+bx^3=c$) *Quando le cose e li cubi si agugliano al numero ridurai la equazione a 1 cubo:* $(x^3+px=q)$ *partendo per la quantità delli cubi,* (dividendo per b) *poi cuba la terza parte delle cose,* (forma $p^3/27$) *poi quadra la metà dil numero,* (forma $q^2/4$) *e questo suma con il detto cubato,* (forma $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$) *et la radice quadra di deta summa più la metà del numero fa un binomio, et la radice cuba di tal binomio men la radice cuba dil suo residuo val la cosa.*

Sembra acclarato che Dal Ferro risolse anche le equazioni del tipo $x^3 = px+q$ ed $x^3+q = px$ che, fedelmente alla classificazione delle equazioni quadratiche di al-Khuwaritzmi, vengono intese come distinte in quanto i coefficienti p e q sono sempre presi *positivi*.

La formula di Dal Ferro non venne pubblicata ma la sua scoperta si colloca approssimativamente nel decennio tra il 1505 ed il 1515. È plausibile che la formula sia circolata tra gli allievi di Dal Ferro come prova il fatto che nel 1530 Antonio Maria Flor venne in possesso delle regole e se ne avvalse per sfidare un certo Zuannin de Tonini de Coi da Brescia che a sua volta sfidò il concittadino Tartaglia ponendogli la soluzione di due problemi di terzo grado. Tartaglia che in un primo momentò si adirò con il Tonini per avergli posto questioni insolubili, cambiò parere quando seppe che Flor si faceva forte di una regola avuta da un grande maestro [4] e si mise a cercare indipendentemente la soluzione ai problemi proposti, riuscendo nell'intento il 12 febbraio 1535. Nel frattempo Cardano, che stava preparando con l'allievo Ludovico Ferrari il materiale destinato a formare un'opera matematica di ampio respro, venne a conoscenza e dell'esistenza della formula di Dal Ferro e del fatto che Tartaglia asseriva di aver riottenuto gli stessi risultati. Più volte allora chiese a Tartaglia di svelargli la soluzione e quest'ultimo acconsentì il 25 marzo del 1539, obbligando Cardano con giuramento a non divulgare la scoperta. Qualche mese dopo, il 4 agosto del 1539, Cardano chiese a Tartaglia chiarimenti sul *casus irreducibilis*, cioè il caso in cui $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ e dunque si presentano nella formula risolutiva radici quadrate di numeri negativi, senza ottenere una risposta soddisfacente. Nel 1545 Cardano pubblicò a Norimberga l'*Ars Magna* dove compaiono, per la prima volta a stampa, le risoluzioni delle equazioni di terzo grado (dette impropriamente formule cardaniche) e di quarto grado, quest'ultima ottenuta da Ferrari. La pubblicazione dell'*Ars Magna* scatenò le ire di Tartaglia che, nel 1546, pubblicò a sue spese a Venezia i *Quesiti et Invenzioni diverse* dove intendeva mettere in chiaro il suo ruolo nella scoperta e dove anche accusava Cardano di spergiuro. È l'inizio della *disfida* tra Tartaglia e Ludovico Ferrari (Cardano non scese mai in prima linea) costituita dai *Cartelli* di sfida matematica: tra il 10 febbraio 1547 ed il 24 luglio 1548 comparvero dodici cartelli, sei di Ferrari e sei di Tartaglia e la *disfida* pubblica si svolse il 10 agosto 1548 a Milano. La polemica tra Tartaglia e Ferrari fu molto violenta e, come succede in questi casi, gli elementi di verità sostenuti da ciascuno dei contendenti si disperdono nella veemenza dello scontro dialettico. Ad esempio fu ingiusto sminuire la scoperta delle formule risolutive di Tartaglia che Ferrari nel secondo Cartello bollò come *invenzioncella* (*inventiculam*) e *pianticella lagnuente e mezza morta*[4], rivitalizzata dall'innesto nell'orto fertile dell'*Ars Magna* dove Cardano peraltro aveva riconosciuto fin dal Capitolo I di aver ricevuto la formula risolutiva da Tartaglia, nonché la primazia di Dal Ferro. Tartaglia comunicò con questi versi la regola a Cardano

Quando che 'l cubo con le cose appresso
Se agguaglia à qualche numero discreto
Trovan dui altri differenti in esso.
Dà poi terrai questo per consueto
Che 'l lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sottratti
Varrà la tua cosa principale ([1], p.253)

I versi di Tartaglia si riferiscono al caso $x^3+px=q$ (altri due gruppi di versi riguardano le equazioni $x^3=px+q$ e $x^3+q=px$) e la loro trascrizione formale consiste nel trovare due numeri (*dui altri*), u e v che abbiano per differenza q

$$u - v = q \tag{4.8}$$

il cui prodotto sia pari a $(p/3)^3$,

$$uv = \frac{p^3}{27}\,. \tag{4.9}$$

Troavati questi numeri, con il ricorso ad un'equazione di secondo grado, l'incognita (*la cosa*) x ha valore $x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$, cioè

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Ripercorrendo i versi di Tartaglia a ritroso sarebbe stato possibile mostrare che $x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$ è radice dell'equazione, patto che p e q soddisfino i vincoli (4.8)-(4.9). Fatto sta che né Cardano né Tartaglia si accorsero della possibilità di ottenere la dimostrazione per questa via puramente algebrica, operando cioè come suggerito da Maracchia nella ricostruzione riportata poco sopra, mostrando ancora una volta che il supporto geometrico era considerato il solo in grado di fornire una dimostrazione solida. Cardano procede con la suddivisione di un cubo in altri due cubi e sei parallelepipedi per poter costruire un segmento soluzione di una assegnata equazione numerica di terzo grado. Nei capitoli

[4] languentem et semimortua arbusculam

XI-XXIII dell'*Ars Magna* Cardano passa in rassegna tutti i casi ammissibili di equazione cubica ed ogni capitolo ha una struttura ben precisa: dimostrazione, enunciato della regola da seguire, esempi.

L'*Ars Magna* contiene, oltre alle formule risolutive per equazioni di terzo e quarto grado, altri risultati notevoli che furono approfonditi o riscoperti da altri matematici.

Anzitutto egli inaugura la teoria delle *trasformazioni*, ovvero di quei cambiamenti di variabile che permettono di semplificare un'equazione. Ad esempio, nel Capitolo XIV Cardano affronta la risoluzione di $x^3 = px^2 + q$ e dimostra come, posto $x = (y + \frac{p}{3})$, si riesca ad eliminare il coefficiente del termine in y^2, ricadendo nel caso $y^3 = p'y + q'$. Anche se Cardano considera equazioni numeriche, egli è consapevole della potenzialità del metodo che sarà generalizzato da Tschirnhaus, attorno alla fine del '600.

Un altro aspetto degno di nota in Cardano è l'uso di numeri negativi per giungere talora alle soluzioni positive di altre equazioni. Nel Capitolo XVIII, dedicato alle equazioni del tipo $x^3 + px = qx^2 + r$, all'esempio 6 considera l'equazione $x^3 + 21x = 9x^2 + 5$ che viene trasformata nell'equazione $y^3 + 4 = 6y$ grazie alla sostituzione $x = y + 3$; l'equazione trasformata ammette tre radici: $y = 2$, $y = \sqrt{3} - 1$ ed $y = -(\sqrt{3} + 1)$: quest'ultima è detta radice falsa o fittizia (*ficta* nell'originale) e serve per giungere alle tre soluzioni positive dell'equazione in x: $x = 5$, $x = \sqrt{3} + 2$, $x = 2 - \sqrt{3}$. Un altro impiego dei numeri negativi si trova al Capitolo XXXVII, dedicato alla regola di *porre il falso*, cioè nell'assumere un valore negativo per l'incognita. Ad esempio, il primo problema del Capitolo XXXVII è formulato in questi termini:

La dote della moglie di Francesco supera di 100 aurei la proprietà di Francesco ed il quadrato della dote supera di 400 il quadrato della proprietà di Francesco. Determinare la dote e la proprietà[5]. ([7], p. 286)

Cardano suppone che $-x$ sia il valore della proprietà di Francesco, cosicché la dote è $100 - x$. Imponendo la seconda condizione, $(100 - x)^2 - x^2 = 400$ Cardano detemina la soluzione $x = 48$ dell'equazione di primo grado risultante e conclude che

questo è quanto egli possiede, in negativo, cioè quanto gli manca, mentre la dote sarà il residuo di 100, cioè 52[6]. ([7], p. 287)

Tornando al Capitolo XVIII, Cardano approfondisce un altro punto importante già sollevato nel Capitolo I, in una nota al §7. Egli afferma che in tre esempi da lui considerati la somma delle radici è sempre uguale al coefficiente del termine di secondo grado (non al suo opposto perché il termine qx^2 è a destra del segno di uguaglianza) e con questo apre la via al legame tra radici e coefficienti di un'equazione che verrà sviluppato in seguito da Viète e Girard.

Nel Capitolo XXV, dedicato alle regole imperfette e particolari, Cardano considera l'equazione $x^3 = 16x + 21$ e osserva che $x = -3$ ne è radice

Poiché la somma di 27, un cubo, con 21 fà 48 che è il prodotto di 3, la radice cubica di 27, e 16, il coefficiente di x, dico dunque che $x + 3$ *è divisore comune,*

[5] Dos uxoris Francisci, est aurei 100 plusquam Francisci peculium, et dos uxoris eius in se ducta est aurei 400 plus peculio Francisci in se ducto, quaeritur dos et peculium.

[6] Igitur res est 48 et tantum habuit m. id est debiti, et dos erit residuum ad 100 scilicet 52

se si aggiunge 27 ad ambo i membri, a x^3 *e* $16x + 21$. *Svolta la divisione avrete*

$$x^2 - 3x + 9 = 16.$$

Dunque

$$x^2 = 3x + 7$$

ed $x = \sqrt{9\frac{1}{4}} + 1\frac{1}{2}$.[7] ([7], p.267)

Dunque Cardano anticipa quello che sarà il teorema di Cartesio-Ruffini: un polinomio $p(x)$ ammette la radice $x = a$ se e solo se $p(x)$ è divisibile per $x - a$.

Cardano va infine ricordato per aver introdotto al Capitolo XXXVII dell'*Ars Magna* i numeri immaginari che rappresentano l'altro esempio di *porre il falso.*

Se si dicesse: dividi 10 in due parti il prodotto delle quali sia 30 o 40, è chiaro che si tratterebbe di un caso impossibile. Tuttavia procediamo in questo modo. Dividiamo 10 in due parti uguali, ciascuna pari a 5. Elevate queste al quadrato si ottiene 25. Sottraete 40, se volete dal 25 così ottenuto (...) lasciando un resto di -15, la cui radice quadrata, aggiunta o sottratta da 5 dà i fattori il cui prodotto è 40. Queste parti saranno $5 + \sqrt{-15}$ *e* $5 - \sqrt{-15}$.[8] ([7], p. 287)

La soluzione di Cardano consiste nel porre le due parti come $5 + u$ e $5 - u$ ed imporre che il loro prodotto sia 40, che porta alla soluzione $u = \sqrt{-15}$. A questo momento Cardano non ha colto l'utilità di queste bizzarre quantità al punto da affermare *fino a questo punto è giunta la sottigliezza aritmetica, un punto estremo che, come ho detto, è tanto sottile quanto inutile*[9] ([7], p. 287) Ben più profondo sarà il trattamento dei numeri immaginari portato avanti da Bombelli qualche anno dopo la pubblicazione dell'*Ars Magna*.

Nella dimostrazione che segue il problema Cardano giunge al punto in cui occorre moltiplicare $(5 + \sqrt{-15}) \times (5 - \sqrt{-15})$ ed ottiene 40, *dismissis incruciationibus* che può essere reso con *dopo aver cancellato i termini in croce* così come *lasciando da parte le torture mentali.* Cardano ritiene *vere sophistica* la natura di questi numeri *perché non è lecito operare per suo tramite come nel caso del puro meno né come per altri [numeri].*[10]: poiché a differenza dei numeri negativi puri o degli altri numeri non è lecito svolgere per loro tramite le operazioni. Altrove, nella *Ars Magna Arithmeticae* Cardano osserva che $\sqrt{-9}$ non è né +3 né -3 ma è di una terza natura misteriosa: *quaedam tertia natura abscondita.*

[7]Tunc, quia addito 27 numero cubo, ad 21 fit 48 qui producitur ex 3 r. cubica 27 in 16 numerum rerum, ideo circo, quod res p. 3 erit communis divisor, addito 27 utrique parti, scilicet cubo et 16 rebus p. 21 inde facta divisione, habebis quadratum m. 3 rebus p. 9 aequalia 16 quare quadratum aequabitur 3 rebus p. 7 et res erit r. $9\frac{1}{4}$ p. $1\frac{1}{2}$.

[8]Si quis dicat, divide 10 in duas partes, ex quarum unius in reliquam ductu, producatur 30 aut 40 manifestum est quod casus seu quaestio est impossibilis, sic tamen operabimur, dividemus 10 per aequalia et fiet eius medietas 5 duc in se fit 25. auferes ex 25 ipsum producendum, utpote 40 (....) fiet residuum m. 15 cuius r. addita et detracta a 5 ostendit partes, quae invicem ductae producunt 40. erunt igitur hae 5 p. r. m. 15 et 5 m. r. m 15.

[9]hucusque progreditur Arithmetica subtilitas, cujus hoc extremum ut dixi, adèo est subtile, ut fit inutile.

[10]quoniam per eam, non ut in puro *m*: nec in aliis, operationes exercere licet

La formula risolutiva di del Ferro lasciava aperte alcune questioni che sarebbero state affrontate in seguito. Se la si applica all'equazione

$$x^3 + 16 = 12x$$

essa fornisce la radice *ficta* $x = -4$ mentre non riesce a riprodurre la soluzione positiva $x = 2$. Un secondo problema è il modo in cui quantità semplici vengono espresse ricorrendo alla formula di del Ferro. Ad esempio l'equazione $x^3 + x = 2$ ammette $x = 1$ come unica radice reale eppure la formula di del Ferro fornisce per risultato

$$\sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$$

che dunque deve essere un modo molto complicato di riscrivere 1. Proprio la semplificazione di radicali di questo tipo è alla base delle ricerche di Tartaglia sul modo di esprimere $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$ nella forma $u + \sqrt{v}$.

Infine, il problema più serio riguarda il *casus irreducibilis* che si presenta ogni volta in cui l'equazione cubica ha tre radici reali distinte. Se ad esempio consideriamo l'equazione $x^3 = 15x + 4$ che ha $x = 4$ come soluzione ed applichiamo la formula di del Ferro, otteniamo

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

che sembra porre dei dubbi ulteriori sulla validità generale della formula stessa e, quel che è peggio, fa comparire le quantità *sofistiche* $\sqrt{-121}$, ovvero i numeri immaginari che Cardano cercò di evitare per quanto possibile come conferma il fatto che egli trattò equazioni con tre radici reali ma non menzionò il problema, riuscendo a ridurre di grado l'equazione trovandone un fattore lineare.

4.6 Bombelli e la nascita dei numeri complessi

Rafael Bombelli (?-1572?) è l'ultimo rappresentante in ordine cronologico della ricca scuola matematica bolognese del XVI secolo ed ha legato il suo nome all'opera *L'algebra, parte maggiore dell'aritmetica* [8] data alle stampe nel 1572 ma alla quale egli aveva lavorato per venti anni. Fu un'opera che ebbe notevole fortuna tanto che più di un secolo dopo Leibniz si esprimeva in questi termini (*cfr.* [6] p. 168):

Rafael Bombelli, di cui vidi l'Algebra pubblicata già nel secolo scorso a Bologna in elegantissima lingua italiana, fu il primo a trovare che esse [le quantità immaginarie] possono servire ad esprimere le radici vere razionali od esprimibili in numeri, quando l'equazione ne ammette[11]
che dimostra l'importanza attribuita al contributo principale di Bombelli: l'utilizzo dei numeri immaginari per rendere applicabile in ogni caso la formula

[11] Primus omnium Raphael Bombelli, cuius Algebram perelegantem italico sermone jam superiore seculo Bononiae editam vidi, invenit, eas servire posse ad eruendas radices veras rationales sive numeris exprimibiles quando tales habet aequatio.

cardanica. *L'Algebra* di Bombelli è una sorta di *summa* di quanto era noto sulla teoria delle equazioni algebriche nel XVI secolo. Cerchiamo di enucleare alcuni suoi contributi, rimandando al Capitolo 1 per informazioni sulle innovazioni che egli apportò nelle notazioni. Essa fu stampata nel 1572, limitatamente ai primi tre libri mentre i manoscritti del IV ed V libro, contenenti la parte geometrica dell'opera, furono ritrovati da Ettore Bortolotti nel secolo scorso e pubblicati nel 1929 [9].

Bombelli nel I libro ([8], pp. 149-156) espone in modo aritmetico la teoria degli irrazionali quadratici sviluppata nel libro X degli *Elementi* di Euclide e si serve dell'esame delle irrazionalità *cubiche* per risalire alle equazioni cubiche che tali quantità soddisfano. Così egli dimostra che la ricerca di due quantità v ed u tali che

$$\sqrt[3]{\sqrt{n} \pm m} = \sqrt{v} \pm u \tag{4.10}$$

equivale alla risoluzione di un'equazione cubica. Infatti, elevando al cubo si ottiene l'equazione

$$\sqrt{n} \pm m = (3u^2 + v)\sqrt{v} \pm (u^3 + 3uv)$$

che viene scissa in due equazioni, uguagliando a zero i termini contenenti $\sqrt{v}$ da quelli privi di irrazionalità:

$$m = u^3 + 3uv \qquad \text{e} \qquad \sqrt{n} = (3u^2 + v)\sqrt{v}.$$

Se queste equazioni vengono elevate al quadrato e si suppone $n > m^2$ si ottiene

$$n - m^2 = (v - u^2)^3$$

per cui la determinazione di u e v porta a risolvere il sistema

$$\begin{cases} v - u^2 = \sqrt[3]{n - m^2} \\ u^3 + 3uv = m : \end{cases}$$

eliminando v dalla seconda equazione si ricava

$$4u^3 = m - 3u\sqrt[3]{n - m^2}$$

ovvero, moltiplicando ambo i membri per 2,

$$8u^3 + 6u\sqrt[3]{n - m^2} = 2m$$

che dimostra come $x = 2u$ sia radice dell'equazione

$$x^3 + 3\sqrt[3]{n - m^2}x = 2m.$$

D'altra parte, da (4.10) si ottiene

$$2u = \sqrt[3]{\sqrt{n} + m} - \sqrt[3]{\sqrt{n} - m}$$

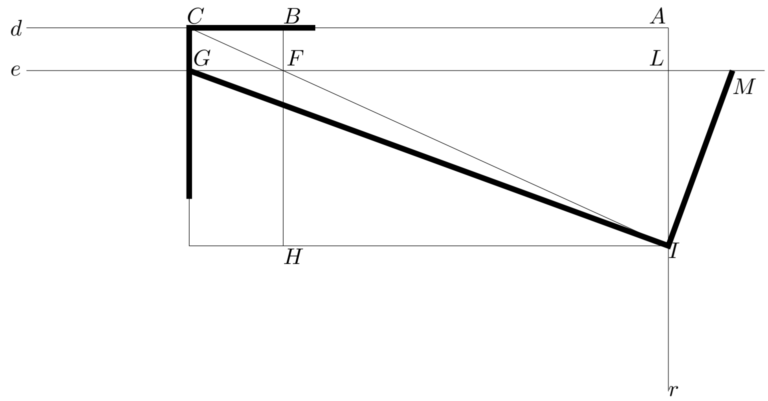

Figura 4.6: Dimostrazione geometrica della formula risolutiva dell'equazione $x^3 = 6x + 4$ in *superficie piana*.

che, posti

$$p := 3\sqrt[3]{n - m^2} \qquad \text{e} \qquad q := 2m,$$

si trasforma nella formula di Scipione del Ferro

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}.$$

Interessante è anche una costruzione geometrica che, a differenza di quella di Cardano, non poggia sulla geometria solida ma è data *in superficie piana*. Con riferimento alla Figura 4.6 Bombelli introduce un segmento unitario, detto q, che fa coincidere con il segmento LM della retta e. Egli effettua ([8], pp. 298-299) la costruzione per l'equazione $x^3 = 6x + 4$ ma è chiaro dallo svolgimento della dimostrazione che la scelta dei coefficienti positivi è del tutto arbitraria. A partire da L egli stacca su e un segmento FL di lunghezza 6, *cioè quanto è il numero delli tanti* ovvero pari al coefficiente del termine di primo grado. Su FL costruisce il rettangolo (*parallelogramma*) $FLAB$ di area 4, cioè pari al coefficiente del termine noto nell'equazione. Tracciata la semiretta d su cui si trova AB e la semiretta r che prolunga AL, Bombelli introduce *gli squadri*: squadre formate ciascuna da due semirette ortogonali saldate nella comune origine. Presa una di queste squadre la si dispone in modo che il vertice I sia vincolato a scorrere su r mentre un lato deve sempre passare per il punto M. Disposta la squadra in una certa posizione, si traccia il segmento FI e lo si prolunga fino al punto C dove interseca la retta d. Si dispone ora la seconda squadra in modo che abbia il vertice C ed un lato sempre lungo d. L'altro lato dovrà intersecare il lato della prima squadra non passante per M in un punto G: quando G sta sulla retta e, il segmento IL risolve l'equazione proposta. Infatti, posto $IL = x$, dal secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo GIM si ha $GL \times LM = IL^2$ per cui $GL = x^2$ e l'area del rettangolo GI è pari a x^3. D'altronde lo stesso rettangolo si può vedere come l'unione del rettangolo IF che ha area $6x$ e del rettangolo GH che ha area 4, essendo equivalente al rettangolo AF (*Elementi*, Prop. I.43). Dunque, uguagliando le due espressioni per l'area di GI si vede che $x^3 = 6x + 4$. Questa dimostrazione è fedele all'originale di Bombelli: Bortolotti in [6] ne dà una versione più moderna che evidenzia l'unicità della soluzione positiva.

COme già accennato, Il contributo maggiore di Bombelli fu l'introduzione dei numeri complessi necessari a trattare il *casus irreducibilis* e rendere applicabile anche in quel caso la formula di del Ferro. Ecco come Bombelli si esprime al riguardo dei numeri complessi:

Ho trovato un'altra sorta di R.c. legate[12]*, molto differenti dall'altre, la qual nasce dal Capitolo di cubo eguale a tanti, e numero, quando il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della metà del numero, come in esso Capitolo si dimostrarà, la qual sorta di R.q. ha nel suo Algorismo diversa operatione dell'altre e diverso nome; perché quando il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della metà del numero lo eccesso loro non si può chiamare né più né meno, però lo chiamerò più di meno quando lo si doverà aggiongere, e quando si doverà cavare lo chiamerò men di meno, e questa operazione è necessarijssima più che l'altre R.c.L. per rispetto delli Capitoli di potenze di potenze, accompagnati con li cubi, o tanti, o con tutti due insieme, che molto più sono li casi dell'agguagliare dove ne nasce questa sorte di R. che quelli dove nasce l'altra, la quale parerà a molti più tosto sofistica che reale, e tale opinione ho tenuto anch'io, sin che ho trovato la sua dimostrazione in linee (come si dimostrarà nella dimostrazione del detto capitolo in superficie piana) e prima trattarò del moltiplicare, ponendo la regola del più e meno.* ([8], Libro I, p.169)

Dunque Bombelli chiama *più di meno* l'espressione $\sqrt{-1}$ e *men di meno* l'espressione $-\sqrt{-1}$.

Le *regole del più e del meno* sono le regole di calcolo di operazioni su numeri complessi

più via più di meno fa più di meno	$+(+i) = +i$
meno via più di meno fa meno di meno	$-(+i) = -i$
più via meno di meno fa meno di meno	$+(-i) = -i$
meno via meno di meno fa più di meno	$-(-i) = +i$
più di meno via più di meno fa meno	$(+i)(+i) = -$
più di meno via meno di meno fa più	$(+i)(-i) = +$
meno di meno via più di meno fa più	$(-i)(+i) = +$
meno di meno via meno di meno fa meno	$(-i)(-i) = -$

([8], Libro I, p.169)
e costituiscono una vera e propria *assiomatizzazione* dell'algebra dei numeri complessi. Bombelli ha altresì osservato che, quando compare un numero complesso tra le soluzioni di un'equazione, vi compare anche il suo complesso coniugato

[12]Bombelli ha definito radice quadrata legata un'espressione del tipo $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, dove b non è un numero quadrato ([8], pp.98-99)

Si deve avvertire che tal sorte di R. legate non possono intravenire se non accompagnato il Binomio col suo residuo come sarebbe R.c. $\lfloor 2 + di - R.q.2 \rfloor$, *il suo residuo sarà R.c.*$\lfloor 2 - di - R.q.2 \rfloor$ *e tal sorta di R. c. per sino a hora mai mi è occorso havere operata l'una senza l'altra.*

Osserviamo che i numeri complessi R.c.$\lfloor 2+di-R.q.2 \rfloor$ e R.c.$\lfloor 2-di-R.q.2 \rfloor$ equivalgono rispettivamente a $\sqrt[3]{2+i\sqrt{2}}$ e $\sqrt[3]{2-i\sqrt{2}}$. Facciamo poi notare come Bombelli enunci il teorema sulla presenza di coppie di radici complesse coniugate in un'equazione algebrica senza dimostrazione ma come frutto dell'esperienza accumulata.

La risoluzione del *casus irreducibilis* viene ottenuta da Bombelli determinando *per prattica*, cioè per tentativi, i numeri (interi negli esempi illustrativi) x ed y tali che

$$\sqrt[3]{b+i\sqrt{a}} = y + ix : \tag{4.11}$$

moltiplicando questa equazione per la complessa coniugata si ottiene

$$\sqrt[3]{b^2+a} = y^2 + x^2,$$

mentre elevando (4.11) al cubo ed uguagliando tra loro le parti reali si ottiene

$$b = y^3 - 3x^2y$$

per cui Bombelli è condotto a cercare le soluzioni intere del sistema

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = \sqrt[3]{b^2+a} \\ y^3 - 3x^2y = b. \end{cases}$$

Bombelli utilizza come esempio il radicale $\sqrt[3]{2+i\sqrt{121}}$ ed è condotto a risolvere il sistema

$$\begin{cases} y^2 + x^2 = 5 \\ y^3 - 3x^2y = 2. \end{cases}$$

da cui si ricava che $y^2 < 5$ e $y^3 > 2$ che è compatibile solo con la scelta $y = 2$, ottenuta *a tentone*, cioè per tentativi. Da $y = 2$ segue $x = 1$ cosicché si ha l'identità

$$\sqrt[3]{2+i\sqrt{121}} = 2 + i.$$

Grazie a questo tipo di risultati, Bombelli è in grado di trattare con successo il *casus irreducibilis* come per l'equazione

$$x^3 = 15x + 4$$

di cui la formula di del Ferro fornisce la soluzione

$$x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$

che, grazie al procedimento visto ora, viene ridotta a

$$x = 2 + i + (2 - i) = 4.$$

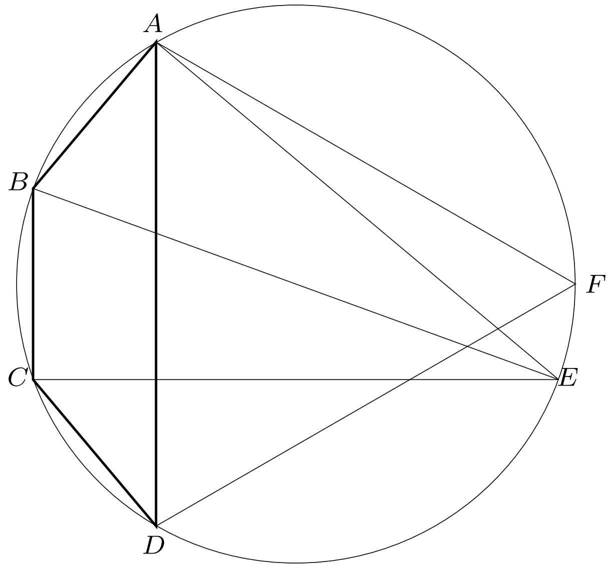

Figura 4.7: Il legame tra la trisezione di un arco e le equazioni di terzo grado visto da Bombelli nel Libro IV della sua *Algebra*.

Un altro merito di Bombelli circa il *casus irreducibilis* sta nell'averne evidenziato il legame con la possibilità di trisecare un angolo, mostrando che quest'ultimo problema conduce ad un'equazione di terzo grado del tipo $x^3 + q = px$ per la quale *può* presentarsi il *casus irreducibilis*. Bombelli considera (Fig. 4.7) una circonferenza di diametro $BE = \sqrt{192}$ e vi inscrive il triangolo equilatero ADF il cui lato deve avere misura pari a 12. Costruire un ennagono regolare inscritto nella circonferenza equivale a saper trisecare l'arco AD pari a $\frac{2\pi}{3}$. Siano B e C i punti che operano tale trisezione e si ponga $AB = BC = CD = 2x$, lato dell'ennagono regolare inscritto. Si consideri ora il trapezio isoscele $ABCD$ inscritto nella circonferenza e si applichi il teorema di Tolomeo (si veda l'Appendice III) ottenendo

$$AC \times BD = AC^2 = AB \times CD + AD \times BC$$

ovvero, numericamente

$$AC = \sqrt{4x^2 + 24x}. \tag{4.12}$$

Similmente, si riapplichi il teorema di Tolomeo al quadrilatero $ABCE$, con E diametralmente opposto a B ricavando

$$AC \times BE = BC \times AE + AB \times CE \tag{4.13}$$

Poiché i triangoli rettangoli ABE e BCE sono congruenti si ha $BC \times AE = AB \times CE$ e, applicando il teorema di Pitagora, si ha

$$AE = CE = \sqrt{192 - 4x^2}$$

che, sostituita in (4.13), fornisce

$$AC = \frac{4x\sqrt{192 - 4x^2}}{\sqrt{192}}. \tag{4.14}$$

Confrontando le espressioni (4.12) ed (4.14) di AC ed elevando al quadrato si ottiene, dopo semplificazioni dirette

$$x^4 + 72x = 36x^2$$

ovvero, eliminata la radice $x = 0$, l'equazione cubica

$$x^3 + 72 = 36x,$$

compatibile con il *casus irreducibilis*. Dunque Bombelli ha mostrato che saper trisecare un angolo di $\pi/3$ è equivalente alla soluzione di un'equazione cubica con certe proprietà. La scelta dell'esempio numerico non lede la generalità del metodo.

4.7 Equazioni di quarto grado

La risoluzione delle equazioni di quarto grado venne pubblicata al Capitolo XXXIX dell'*Ars Magna* dove Cardano la attribuisce al suo discepolo Ludovico Ferrari, avocando a sé il merito della dimostrazione geometrica della formula risolutiva. La risoluzione delle equazioni di quarto grado segna un tornante fondamentale nel processo di affrancamento dell'algebra dalla geometria. Infatti, come scrisse Cardano stesso nell'*Ars Magna Arithmeticae*

Non appena l'uomo sarà giunto a conoscere i Capitoli sino a quelli relativi al cubo, e sono 19, allora ne ha quanto basta per ogni caso algebrico, poiché sino al cubo si trova gradazione in natura: infatti vi sono linee, superficie e corpi: le linee corrispondono alle incognite lineari; le superficie ai quadrati; i corpi ai cubi. Se pertanto avremo fornito su queste notizie sufficienti, sarà noto ciò che è necessario: in verità ciò che aggiungeremo al di là è per diletto e non per compimento di ciò che può trarsi da [tale] studio. Tali Capitoli successivi non esistono veramente in sé ma solo per accidente, se anche ve ne siano [formule] generali.

Similmente, al cap. I dell'*Ars Magna* troviamo

Trattando le altre cose, anche se in generale, tuttavia quasi per estensione, e infatti avendo associato la posizione [i.e. l'incognita] alla linea, il quadrato alla superficie, il cubo al corpo solido, affinché non fosse assolutamente stolto l'aver noi proseguito oltre, in ciò che non è lecito in natura.[13] ([7], p. 222)

Cardano nel Capitolo XXXIX dell'*Ars Magna* antepone la dimostrazione geometrica ad un esempio numerico, coniato sulla falsariga di un problema che Tonini dai Coi aveva proposto a Tartaglia:

[13] Caeter, etiam si generaliter, quasi tamen per transennam, namque cum positio lineam, quadratum superficiem, cubus corpum solidum referat, nae utinum stultum fuerit, nos ultra progredi, quo natuare non licet.

Fai tre parti di 10 posti in proporzione continua tali che il prodotto della prima con la seconda sia 6[14]. ([7], p. 295)

Tradotto in forma algebrica, il problema equivale al sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x : y = y : z \\ xy = 6 \end{cases}$$

che, eliminate le variabili x e z, porta all'equazione biquadratica

$$y^4 + 6y^2 + 36 = 60y\,.$$

Per seguire la dimostrazione geometrica di Cardano, consideriamo il caso generale

$$x^4 + 2ax^2 + q^2 = cx$$

e, se il primo membro non è un quadrato perfetto, aggiungiamo ad ambo i membri $2(q-a)x^2$ cosicché si ha

$$(x^2 + q)^2 = cx + 2(q-a)x^2$$

che è del tipo

$$x^4 + 2qx^2 + q^2 = cx + px^2$$

ed a cui occorre aggiungere un'opportuna quantità che, senza far perdere al membro di sinistra il carattere di essere un quadrato, faccia diventare un quadrato anche il membro di destra. La scelta di Cardano è il trinomio $2yx^2 + y^2 + 2yq$, che rende il membro di sinistra il quadrato del trinomio $(x^2 + q + y)^2$ e permette di usare l'incognita y per rendere un quadrato anche il membro di destra che ora diventa

$$(p + 2y)x^2 + cx + (y^2 + 2yq)\,:$$

chiedendo l'annullamento del discriminante di questo trinomio di secondo grado, Cardano giunge all'equazione di *terzo* grado per y

$$(p + 2y)(y^2 + 2yq) = \frac{c^2}{4}\,:$$

ottenuto un valore per y, lo si può sostituire nell'equazione di quarto grado che, essendo un'uguaglianza tra quadrati, si spezza in una coppia di equazioni di secondo grado. Per dare una veste geometrica al metodo, Cardano considera (Fig. 4.8) un quadrato $ABDO$ di area x^4 e dunque di lato x^2 cui giustappone i due rettangoli uguali $ODME$ e $BCDP$ che hanno lati x^2 e $BC = EO = q$. Infine, si completa il primo quadrato con l'aggiunta del quadrato $DPFM$ di lato q e dunque di area q^2 cosicché il quadrato $ACFE$ ha area $(x^2+q)^2$. Questa costruzione non è una novità, visto che era usata come dimostrazione della formula risolutiva di equazioni di secondo grado. Ora però occorre fare un passo

[14]Fac ex 10 tres partes in continua proportione x quarum ductu primae in secundam, producantur 6.

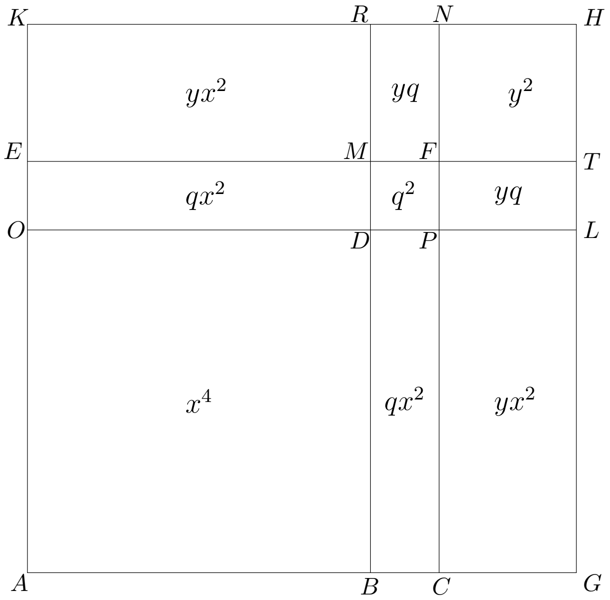

Figura 4.8: Dimostrazione geometrica della formula risolutiva delle equazioni di quarto grado nell'*Ars Magna* di Cardano.

ulteriore giustapponendo due rettangoli congruenti $CGLP$ e $EMRK$ con un lato $CG = EK = a$ incognito, e l'altro sempre pari ad x^2. Si aggiungono altri due rettangoli congruenti $PLTF$ e $MFRN$ di area pari ad aq e si completa il quadrato $AGHK$ co n il quadrato di area a^2 $FTHN$. Pertanto la dimostrazione geometrica si arresta alla formazione del quadrato $(x^2+a+q)^2$ ma non prosegue con la determinazione di a. Si vede dunque come il tradizionale approccio geometrico segni il passo di fronte ad un'equazione che non ammette un significato geometrico immediato per questioni dimensionali: l'algebra si affranca dalla geometria e non è un caso se, già a partire da Bombelli e poi, nel volgere di un secolo, con la geometria analitica di Cartesio, si assisterà al ribaltamento del rapporto, con l'algebra che diventa *strumento* per risolvere problemi geometrici, completando un processo abbozzato da Fibonacci e Pacioli.

Bombelli tratta le equazioni di quarto grado nel secondo libro dell'*Algebra* con un tal dettaglio da essere per qualche tempo considerato il primo risolutore di tali equazioni, offuscando involontariamente Ferrari. Bombelli, in omaggio alla tradizione, distingue 42 casi di equazioni biquadratiche per poter avere coefficienti solo positivi ed il suo metodo di risoluzione algebrica non differisce sostanzialmente da quello di Ferrari. Interessante è osservare come Bombelli *non* attribuisca ad una maggiore esigenza di rigore il ricorso a dimostrazioni geometriche, quanto alla completezza:

E benché questa scienza sia Aritmetica (come la chiama Diofante Autore Greco e li Indiani) però non resta che il tutto non si possi provare per figure

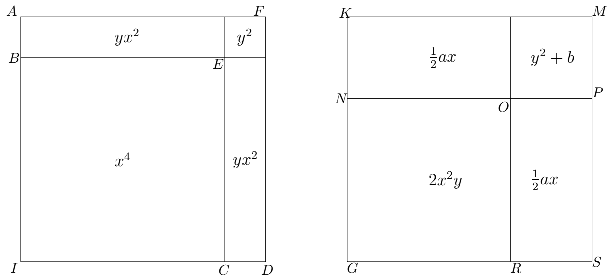

Figura 4.9: Dimostrazione geometrica della formula risolutiva delle equazioni di quarto grado nell'*Algebra* di Bombelli.

Geometriche (come fa Euclide nel secondo, sesto, decimo). Però volendo che il lettore resti in tutto soddisfatto, mi sono risoluto porre tutte le dimostrazioni dello agguagliare, cioè Capitolo per Capitolo, tanto in linea senza numero quanto in linea composto di numero e questa parte non è men bella che dilettevole. ([8], Libro II, p.241)

Per ribadire e rafforzare il concetto, alla conclusione del Libro III Bombelli afferma che l'algebra e la geometria

hanno intra di loro tanta convenientia che l'una è la prova dell'altra e l'altra è la dimostrazion dell'una. ([8], p.648)

La dimostrazione geometrica del caso $x^4 = ax+b$ utilizza il completamento di due diversi quadrati, uno per ogni membro dell'equazione (Fig. 4.9). A sinistra si parte dal quadrato $ICEB$ di area x^4 cui vengono giustapposti i rettangoli congruenti di lato $AB = CD = y$ ed area x^2y ciascuno; il quadrato $IDFA$ viene ottenuto aggiungendo il quadrato EF si area y^2. Con queste aggiunte il secondo membro si è mutato in $ax + b + 2yx^2 + y^2$ che ha la struttura di un quadrato a patto che i quadrati GO ed OM siano di area, rispettivamente, $2yx^2$ e $y^2 + b$ mentre i due rettangoli OS ed OK abbiano area $\frac{1}{2}ax$ ciascuno. Questa richiesta comporta il soddisfacimento del vincolo area$(OK) = RO \times OP$ che a sua volta si traduce in

$$\frac{ax}{2} = \sqrt{2yx^2(b + y^2)}$$

che, elevando al quadrato e semplificando, diventa la risolvente cubica in y

$$2y(y^2 + b) = \frac{a^2}{4}.$$

4.8 Appendice I

In questa Appendice mostriamo la risoluzione tradizionale dell'equazione di terzo grado con le formule di del Ferro, dette impropriamente *cardaniche*. Consideriamo l'equazione

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{4.15}$$

ed operiamo la sostituzione

$$x = y - \frac{a}{3}$$

pervenendo così all'equazione

$$y^3 + py + q = 0 \tag{4.16}$$

dove

$$p := b - \frac{a^3}{3} \qquad q := c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27} \tag{4.17}$$

ed in cui dunque non compare più il termine di secondo grado. Poniamo ora

$$y := u + v$$

e sostituiamo in (4.16). Riordinando i termini abbiamo

$$u^3 + v^3 + (p + 3uv)(u + v) + q = 0$$

che è un'equazione in due incognite *indeterminata* finché non si stabilisca un legame ulteriore tra u e v. Seguendo il matematico olandese Johann Hudde (1628-1704), poniamo allora

$$uv = -\frac{p}{3}$$

così da ridurre l'equazione precedente alla forma

$$u^3 + v^3 = -q :$$

in definitiva, abbiamo ridotto il problema di risolvere (4.16) alla soluzione del sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$

ovvero, elevando al cubo la seconda equazione,

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \, . \end{cases} \tag{4.18}$$

Dunque dobbiamo trovare due numeri, u^3 e v^3 di cui è nota la somma $-q$ ed il prodotto $-\frac{p^3}{27}$ e, come è noto, ciò si riduce alla soluzione di una equazione di *secondo* grado

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{4.19}$$

le cui radici A e B sono

$$A = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad \text{e} \qquad B = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \tag{4.20}$$

Ora, se indichiamo con $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ una radice cubica dell'unità diversa da 1, i valori di u e v sono, rispettivamente

$$u_1 = \sqrt[3]{A} \quad u_2 = \omega\sqrt[3]{A} \qquad u_3 = \omega^2\sqrt[3]{A}$$

e

$$v_1 = \sqrt[3]{B} \quad v_2 = \omega\sqrt[3]{B} \qquad v_3 = \omega^2\sqrt[3]{B}$$

dove $\sqrt[3]{A}$ e $\sqrt[3]{B}$ sono le determinazioni principali delle radici cubiche che sono reali se l'argomento lo è. Sorge ora il problema di come combinare questi sei valori in modo da selezionare le sole *tre* radici dell'equazione (4.16). Occorre combinarle in modo che si abbia $u_i v_j = \frac{p}{3}$ e, ricordando che si ha $\omega^3 = 1$, le tre radici sono

$$y_1 = u_1+v_1 = \sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B} \quad y_2 = u_2+v_3 = \omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B} \quad y_3 = u_3+v_2 = \omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}\,.$$

La natura delle radici dipende dal segno del *discriminante*

$$\Delta := 4p^3 + 27q^2. \tag{4.21}$$

Quando $\Delta > 0$, sia A che B sono numeri reali per cui y_1 è reale e siccome $\sqrt[3]{A} \neq \sqrt[3]{B}$ le altre radici y_2 ed y_3 sono complesse coniugate.

Se $\Delta = 0$, A e B sono reali e coincidenti. Poiché $1 + \omega + \omega^2 = 0$ si vede che $y_2 = y_3 = -\sqrt[3]{A}$ mentre $y_1 = 2\sqrt[3]{A}$. Le tre radici possono coincidere in 0 quando q, e quindi p, si annulla.

Il caso $\Delta < 0$ ha una sua rilevanza storica particolare in quanto costituisce il *casus irreducibilis* ed è strettamente legato alla storia dei numeri complessi. Infatti ora abbiamo

$$\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = i\sqrt{-\frac{\Delta}{108}}$$

e si ha

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{\Delta}{108}}} = a + ib \qquad \sqrt[3]{B} = \overline{\sqrt[3]{A}} = a - ib,$$

dove $\overline{(x)}$ indica il complesso coniugato di x. Dunque

$$y_1 = 2a$$

$$y_2 = \omega(a+ib) + \omega^2(a-ib) = -a - b\sqrt{3}$$

e

$$y_3 = \omega^2(a+ib) + \omega(a-ib) = -a + b\sqrt{3}\,:$$

le tre radici sono *reali* e distinte.

Il metodo di risoluzione proposto ha, a ben guardare, un elemento *spurio*: la necessità di eliminare dai *nove* valori per $u + v$, sei valori che non soddisfano il vincolo $uv = -\frac{p}{3}$. Per ovviare a questo problema il matematico inglese Arthur

Cayley (1821-1895) propose [10] un'acuta variante alla procedura tradizionale di Hudde partendo da un'equazione nella forma

$$x^3 + px + q = 0, \tag{4.22}$$

con $q \neq 0$, egli cercò soluzioni nella forma $x = uv(u+v)$ che trasforma (4.22) in

$$u^3v^3(u^3 + v^3) + q + 3u^4v^4(u + v) + puv(u + v) = 0$$

da cui si ricava il sistema

$$\begin{cases} u^3v^3(u^3 + v^3) + q = 0 \\ uv(u + v)(3u^3v^3 + p) = 0. \end{cases}$$

Ora, poiché si è supposto $q \neq 0$, $x = uv(u + v) \neq 0$ per cui possiamo riscrivere il sistema come

$$\begin{cases} u^3v^3 = -\frac{p}{3} \\ u^3 + v^3 = \frac{3q}{p} \end{cases} \tag{4.23}$$

per cui siamo ancora una volta ricondotti a ricercare due numeri, u^3 e v^3, noti la loro somma ed il loro prodotto. Questi numeri risolvono l'equazione di secondo grado

$$t^2 - \frac{3q}{p}t - \frac{p}{3} = 0$$

e dunque otteniamo

$$u_1 = \sqrt[3]{\frac{3q}{2p} + \sqrt{\frac{9q^2}{4p^2} + \frac{p}{3}}} \qquad v_1 = \sqrt[3]{\frac{3q}{2p} - \sqrt{\frac{9q^2}{4p^2} + \frac{p}{3}}}.$$

A differenza che nel metodo di Hudde, ora il prodotto uv non è più vincolato e, se si sceglie *qualunque* altra determinazione della radice cubica, tra $u_2 = \omega u_1$, $u_3 = \omega^2 u_1$ così come tra $v_2 = \omega v_1$ e $v_3 = \omega^2 v_1$ *non* si ottengono altre radici del sistema (4.23). D'altra parte, la funzione $uv(u+v)$ può assumere solo *tre* valori che risolvono l'equazione (4.22) di partenza. Infatti, siccome [11]

$$3uv(u + v) = (u + v)^3 - (u^3 + v^3)$$

ed $(u^3 + v^3)$ assume un sol valore, qualunque determinazione si prenda per u e v, i valori di x sono tanti quanti quelli di $(u + v)^3$, cioè tre, perché

$$(u_1 + v_1)^3 = (u_2 + v_2)^3 = (u_3 + v_3)^3 = A_1$$

$$(u_1 + v_2)^3 = (u_2 + v_3)^3 = (u_3 + v_1)^3 = A_2$$

e

$$(u_2 + v_1)^3 = (u_3 + v_2)^3 = (u_1 + v_3)^3 = A_3.$$

4.9 Appendice II

Vediamo ora nel linguaggio moderno la risoluzione dell'equazione di quarto grado

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{4.24}$$

che vien posta nella forma

$$x^4 + ax^3 = -(bx^2 + cx + d)$$

in modo da poter completare il quadrato a sinistra aggiungendo ad ambo i membri $\frac{a^2}{4}x^2$ per poter scrivere

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d\,.$$

Se il membro di destra è anch'esso un quadrato perfetto, il problema è ricondotto alla soluzione di due equazioni di secondo grado. In caso contrario si introduce una variabile ausiliaria y e si completa ulteriormente il quadrato a sinistra aggiungendo ad ambo i membri $(x^2 + \frac{a}{2}x)y + \frac{y^2}{4}$ così da ottenere

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 - \left(c - \frac{1}{2}ay\right)x - d + \frac{1}{4}y^2.$$

Occorre ora servirsi della variabile libera y per far in modo che anche il membro di destra sia un quadrato. Trattandosi di un trinomio di secondo grado in x, la condizione perché ciò succeda è che si annulli il suo discriminante, ovvero che sia

$$\left(c - \frac{1}{2}ay\right)^2 = 4\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)\left(\frac{1}{4}y^2 - d\right)$$

cioè, operate opportune semplificazioni,

$$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + 4bd - a^2d - c^2 = 0\,:$$

Dunque y viene ottenuto grazie alla risoluzione di questa equazione di terzo grado. Una qualsiasi sua soluzione y_1 permette di scrivere

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y_1}{2}\right)^2 = (ex + f)^2$$

dove e ed f sono funzioni di y_1. Otteniamo allora la separazione dell'equazione di quarto grado in due equazioni di secondo grado,

$$x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{1}{2}y_1 = ex + f \qquad x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{1}{2}y_1 = -(ex + f)$$

da cui si ricavano le quattro soluzioni di (4.24).

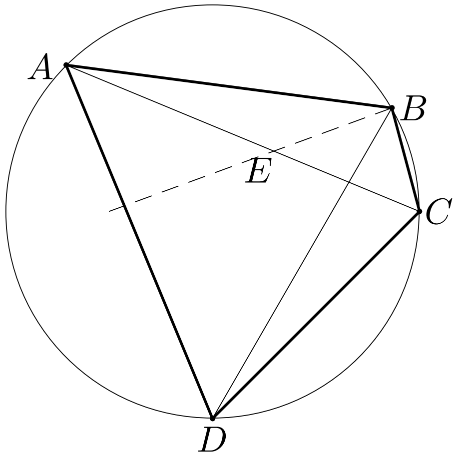

Figura 4.10: Dimostrazione del teorema di Tolomeo.

4.10 Appendice III

Dimostriamo per completezza in questa appendice il teorema di Tolomeo, ripetutamente utilizzato nel problema della trisezione di un angolo.
Teorema *Dato un quadrilatero convesso $ABCD$ inscrivibile in una circonferenza il rettangolo costruito sulle diagonali è equivalente alla somma delle aree dei rettangoli costruiti su coppie di lati opposti del quadrilatero.*

Dim. Con riferimento alla Figura 4.10, il teorema equivale a dimostrare che

$$AC \times DB = AB \times CD + BC \times AD.$$

Per questo si tracci l'angolo $\angle(ABE)$ di ampiezza pari a $\angle(DBC)$ e sia E sulla diagonale AC. I triangoli $\triangle(ABE)$ e $\triangle(DBC)$ sono simili perché hanno $\angle(ABE) = \angle(DBC)$, per costruzione, ed $\angle(BAC) = \angle(BDC)$ perché entrambi insistono sulla corda BC. Dunque si ha

$$AB : AE = BD : CD$$

che si può riscrivere come

$$AE \times BD = AB \times CD. \tag{4.25}$$

Si considerino ora i triangoli $\triangle(ABD)$ e $\triangle(EBC)$; essi sono simili perché $\angle(ABD) = \angle(EBC)$ (si ottengono aggiungendo l'angolo comune $\angle(EBD)$ ad $\angle(ABE)$ e $\angle(DBC)$) e $\angle(ADB) = \angle(ECB)$ perché insistono entrambi sull'arco AB. Si ha allora

$$EC : AD = BC : BD$$

ovvero

$$EC \times BD = AD \times BC$$

che, sommata a (4.25), dimostra l'enunciato.

Bibliografia

[1] S. Maracchia: *Storia dell'Algebra.* Liguori, Napoli, (2005).

[2] U. Cassina: Sull'equazione cubica di Leonardo Pisano. In *Dalla Geometria Egiziana alla Matematica Moderna*, Cremonese, Roma (1961).

[3] F. Woepcke: Sur un essai de déterminer la nature de la racine d'une équation du troisième degré, contenu dans un ouvrage de Léonard de Pise décopuvert par M. le prince Balthasar Boncompagni. *J. Math. Pures et Appl.* **19** (S. 1), 401-406, (1854).

[4] S. Glushkov: On approximation methods of Leonardo Fibonacci. *Historia Mathematica* **3**, 291–296, (1976).

[5] B.L. van der Waerden: *A History of Algebra.* Springer, Berlin-Heidelberg, (1985).

[6] E. Bortolotti: L'algebra nella scuola matematica bolognese del secolo XVI. *Periodico di Matematiche* **5** (S. IV), 147-192, (1925).

[7] G. Cardano: *Artis Magnae, sive de regulis algebraicis, liber unus* In *Hieronimi Cardani Opera Omnia*, vol. IV, pp. 221-302.

[8] R. Bombelli: *L'Algebra parte maggiore dell'Aritmetica.* Rossi, Bologna, (1572).

[9] *L'Algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna.* Libri IV e V contenenti la "Parte Geometrica" inedita tratta dal manoscritto B. 1569 della biblioteca dell'Archiginnasio di Bologna. Pubblicata a cura di Ettore Bortolotti. Zanichelli, Bologna, (1929)

[10] A. Cayley: Note on Mr. Jerrard's researches on the equation of the fifth order. *Philosophical Magazine* **21**, 210–214, (1861). In: *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*, editori: F.H. Collins ed A.R. Forsyth. vol V, pp.50-54, Cambridge University Press, Cambridge (U.K.), (1892).

[11] U. Scarpis: Sulla formula di risoluzione dell'equazione cubica. *Boll. Mathesis* 189–190 (1919).