Capitolo 1

Vettori applicati

1.1 Richiami teorici

Definizione 1.1 *Un sistema di vettori applicati* Σ *è un insieme*

$$\{(P_i, \boldsymbol{v}_i), \quad P_i \in \mathcal{E}, \ \boldsymbol{v}_i \in \mathcal{V}, \quad i = 1, \ldots, N\}, \tag{1.1}$$

dove P_i *è detto punto di applicazione del vettore* $\boldsymbol{v}_i$.

La limitazione ad un numero finito N di vettori può essere rilassata considerando sistemi formati da infiniti vettori applicati, sia delle distribuzioni *continue* di vettori applicati dove in ciascun punto di una regione dello spazio è assegnatà una *densità* di vettori applicati, come vedremo nel seguito.

Ogni sistema di vettori applicati è caratterizzato da un *risultante* $\boldsymbol{R}$, un vettore *libero* definito da

$$\boldsymbol{R} := \sum_{I=1}^{N} \boldsymbol{v}_i \,. \tag{1.2}$$

Il *momento* $\boldsymbol{m}_O$ del vettore applicato $(P_i, \boldsymbol{v}_i)$ rispetto ad un punto di riferimento $O \in \mathcal{E}$, detto *polo*, è definito da

$$\boldsymbol{m}_O := P_i - O \wedge \boldsymbol{v}_i. \tag{1.3}$$

Detta $d_{iO} := |P_i - O|$ la distanza del punto di applicazione P_i dal polo O, abbiamo

$$|\boldsymbol{m}_O| = d_{iO}|\boldsymbol{v}_i| \sin\alpha = b|\boldsymbol{v}_i|, \tag{1.4}$$

dove $\alpha \in [0, \pi]$ è l'angolo tra la retta passante per P_i ed O e la *retta di applicazione* del vettore applicato $(P_i, \boldsymbol{v}_i)$, vale a dire retta passante per P_i e diretta come $\boldsymbol{v}_i$. In (1.4), abbiamo introdotto $b := d_{iO} \sin\alpha$ che rappresenta la distanza da O della retta di applicazione di $(P_i, \boldsymbol{v}_i)$.

Definizione 1.2 *Il momento risultante* $\boldsymbol{M}_O$ *del sistema di vettori applicati* (1.1) *rispetto ad un polo* $O \in \mathcal{E}$ *è definito come*

$$\boldsymbol{M}_O := \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \boldsymbol{v}_i \tag{1.5}$$

Il seguente teorema di *trasporto* evidenzia la dipendenza del momento di un certo sistema di vettori applicati dalla scelta del polo.

Teorema 1.1 *Presi due punti* O *e* Q *qualsiasi nello spazio euclideo* $\mathcal{E}$ *ed un sistema di vettori applicati* Σ*, abbiamo*

$$\boldsymbol{M}_Q = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{R} \wedge (Q - O) = \boldsymbol{M}_O + (O - Q) \wedge \boldsymbol{R}. \tag{1.6}$$

Dal teorema di trasposto seguono i seguenti corollari:

Corollario 1.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché il momento di un sistema* Σ *di vettori applicati sia indipendente dalla scelta del polo è che* $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$*.*

Definizione 1.3 *Una coppia è un sistema di vettori applicati del tipo*

$$\Sigma := \{(P, -\boldsymbol{v}), (Q, \boldsymbol{v})\}. \tag{1.7}$$

Dalla definizione 1.3 e dal corollario 1.1 segue che il momento $\boldsymbol{M}$ di una coppia è *indipendente* dalla scelta del polo. Si ha dunque

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_P = (Q - P) \wedge \boldsymbol{v} \tag{1.8}$$

e, detta b la distanza delle rette di applicazione parallele dei vettori che formano la coppia, si ha anche

$$|\boldsymbol{M}| = b|\boldsymbol{v}|. \tag{1.9}$$

Corollario 1.2 *Per un sistema di vettori applicati qualsiasi* Σ*, lo scalare*

$$\mathcal{I} := \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_O \tag{1.10}$$

è indipendente dalla scelta del polo $O \in \mathcal{E}$ *ed è detto trinomio invariante di* Σ*.*

Corollario 1.3 *Assegnato un sistema* Σ *di vettori applicati con risultante* $\boldsymbol{R} \neq \boldsymbol{0}$ *e preso un punto* $O \in \mathcal{E}$*, il luogo dei punti* $Q \in \mathcal{E}$ *tali che* $\boldsymbol{M}_Q = \boldsymbol{M}_O$ *è formato dalla retta passante per* O *e diretta lungo* $\boldsymbol{R}$*.*

In molte applicazioni è utile saper risolvere l'equazione

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}, \tag{1.11}$$

dove $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono due vettori che supporremo entrambi diversi da $\mathbf{0}$. È possibile dimostrare che

Teorema 1.2 *Condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione* (1.11) *sia risolubile è che*

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0; \tag{1.12}$$

accertata la validità di questa condizione, le soluzioni di (1.11) *sono tutti e soli i vettori* $\boldsymbol{x}$ *dati dalla formula*

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}^2|}\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} + \lambda \boldsymbol{a} \tag{1.13}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$.

Per un sistema di vettori applicati con risultante non nullo, il momento risultante dipende necessariamente dalla scelta del polo. È però possibile mostrare che vale la seguente scomposizione

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{M}_O^{\perp} + \mu \boldsymbol{R} = \boldsymbol{M}_O^{\perp} + \frac{\mathcal{I}}{|\boldsymbol{R}|^2}\boldsymbol{R}, \tag{1.14}$$

dove $\boldsymbol{M}_O^{\perp}$ è ortogonale al risultante e dunque soddisfa la condizione $\boldsymbol{M}_O^{\perp} \cdot \boldsymbol{R} = 0$ mentre il coefficiente μ, dipendendo solo dal trinomio invariante $\mathcal{I}$ e del modulo del risultante, è indipendente dalla scelta del polo O. Grazie a (1.14) è possibile definire l'*asse centrale* di un sistema di vettori applicati per un sistema di vettori applicati con risultante non nullo.

Definizione 1.4 *L'asse centrale di un sistema* Σ *di vettori applicati con risultante* $\boldsymbol{R} \neq \mathbf{0}$ *è il luogo dei punti* $Q \in \mathcal{E}$ *tali che*

$$\boldsymbol{M}_Q = \mu \boldsymbol{R} = \frac{\mathcal{I}}{|\boldsymbol{R}|^2}\boldsymbol{R}.$$

Si dimostra che l'asse centrale è una retta, parallela ad $\boldsymbol{R}$, di equazione parametrica

$$Q - O = \frac{1}{|\boldsymbol{R}|^2}\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O + \lambda \boldsymbol{R}, \tag{1.15}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definizione 1.5 *Due sistemi di vettori applicati* Σ*, di risultante* $\boldsymbol{R}$*, e* σ'*, di risultante* $\boldsymbol{R}'$ *sono detti equivalenti quando*

$$\begin{cases} \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}' \\ \boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{M}'_O \end{cases}$$

dove $\boldsymbol{M}_O$ *e* $\boldsymbol{M}'_O$ *sono i momenti di* Σ *e* Σ' *rispetto ad un punto* O *qualsiasi dello spazio euclideo* $\mathcal{E}$.

Nelle applicazioni è importante il seguente teorema di *riduzione*

Teorema 1.3 *Dato un sistema Σ di vettori applicati è sempre possibile trovare un sistema Σ' di vettori applicati formato da un vettore e da una coppia.*

1.2 Esercizi risolti

Esercizio 1.1 *Determinare, per il seguente sistema di vettori applicati,*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 4\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3 & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (1, -3, 2), \\ \boldsymbol{v}_2 = 4\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (2, 1, 1), \\ \boldsymbol{v}_3 = -5\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 - 4\boldsymbol{e}_3 & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (1, 2, 3) \end{cases}$$

il risultante ed il momento risultante, il trinomio invariante e l'equazione dell'asse centrale. Determinare un sistema di vettori applicati, equivalente a quello proposto, e formato da due vettori, di cui uno applicato in $Q \equiv (2, -1, 0)$.

Dall'equazione (1.2) otteniamo che il risultante è $\boldsymbol{R} = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ mentre per il calcolo del momento risultante rispetto ad O ci serviamo dell'equazione (1.5) e, per sviluppare i singoli prodotti vettoriali ci serviamo della regola del determinante simbolico: data una base ortonormale positivamente orientata $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ e due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3,$$

allora si ha

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

Nel nostro caso, siccome $P_1 - O = \boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$, $P_2 - O = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$ e $P_3 - O = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$, abbiamo

$$\boldsymbol{M}_O = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

e, svolgendo i calcoli,

$$\boldsymbol{M}_O = -26\boldsymbol{e}_1 - 6\boldsymbol{e}_2 + 16\boldsymbol{e}_3.$$

Grazie alla definizione (1.10), il trinomio invariante è $\mathcal{I} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{M}_O = -74$. Siccome $|\boldsymbol{R}|^2 = 14$ e $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = 38\boldsymbol{e}_1 - 74\boldsymbol{e}_2 + 34\boldsymbol{e}_3$, come si verifica riapplicando la regola (1.16), i punti $Q - O = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$ dell'asse centrale soddisfano l'equazione (1.15) che, in componenti, diventa

$$\begin{cases} x = \frac{19}{7} + 3\lambda \\ y = -\frac{37}{7} + 2\lambda \\ z = \frac{17}{7} + \lambda. \end{cases}$$

Per rispondere all'ultimo quesito osserviamo che, applicando il teorema del trasporto, si ottiene

$$\boldsymbol{M}_Q = \boldsymbol{M}_O + \boldsymbol{R}\wedge(Q-O) = -26\boldsymbol{e}_1 - 6\boldsymbol{e}_2 + 16\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{R}\wedge(2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = -25\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2 + 9\boldsymbol{e}_3.$$

Per risolvere il problema, consideriamo il sistema

$$\Sigma' = \{(Q,\boldsymbol{R}),(Q,-\boldsymbol{v}),(S,\boldsymbol{v})\} \equiv \{(Q,\boldsymbol{R}-\boldsymbol{v}),(S,\boldsymbol{v})\}$$

dove sia il vettore $\boldsymbol{v}$ che il punto $S \in \mathcal{E}$ sono *incogniti.* Per costruzione, Σ' ha lo stesso risultante di Σ ed è composto da due soli vettori di cui uno, $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{v}$, applicato in Q. Esso risponde al quesito del problema se il suo momento $\boldsymbol{M}'_Q$ rispetto a Q coincide con $\boldsymbol{M}_Q$. Occorre cioè che sia

$$(S-Q)\wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{M}_Q. \tag{1.17}$$

Posto $S-Q=\boldsymbol{x}$, l'equazione (1.17) ha la stessa struttura di (1.11), con $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{M}_Q$. Per poter dunque risolvere (1.17) occorre garantire che valga la condizione (1.12), cioè che sia $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{M}_Q = 0$. Possiamo, ad esempio, scegliere $\boldsymbol{v} = 9\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3$. Allora, applicando la formula risolutiva (1.13) e prendendo per semplicità $\lambda = 0$ otteniamo

$$S-Q = \frac{1}{97}(97\boldsymbol{e}_1 - 100\boldsymbol{e}_2 + 225\boldsymbol{e}_3)$$

per cui $S-O = (S-Q)+(Q-O) = 3\boldsymbol{e}_1 - \frac{197}{97}\boldsymbol{e}_2 + \frac{225}{97}\boldsymbol{e}_3$. Il sistema Σ' è dunque dato da

$$\Sigma' = \{(Q, 3\boldsymbol{e}_1 - 7\boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3),(S, 9\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3)\}.$$

Osservazione. Il sistema Σ' *non* è l'unico possibile perché si possono costruire infiniti sistemi di vettori applicati soddisfacenti alle condizioni imposte dal problema: basta scegliere o un diverso vettore $\boldsymbol{v}$, purché ortogonale a $\boldsymbol{M}_Q$, ed un diverso valore di λ quando si determina $S-Q$.

Esercizio 1.2 *Determinare, per il seguente sistema di vettori applicati,*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (2,-1,2), \\ \boldsymbol{v}_2 = -2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3 & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (1,1,3), \\ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3 & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (1,4,-1) \end{cases}$$

il risultante ed il momento risultante, il trinomio invariante e l'equazione dell'asse centrale. Determinare un sistema Σ' di vettori applicati, equivalente a quello proposto e formato da due vettori, di cui uno applicato in $Q \equiv (1,1,1)$.

Rimandando all'esercizio precedente per il dettaglio dei calcoli, si ottiene che il risultante è $\boldsymbol{R} = 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3$ ed il momento risultante rispetto ad O è $\boldsymbol{M}_O = -12\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2 + 7\boldsymbol{e}_3$, per cui il trinomio invariante è $\mathcal{I} = -26$. Siccome $|\boldsymbol{R}|^2 = 24$ e $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = 36\boldsymbol{e}_1 - 38\boldsymbol{e}_2 + 40\boldsymbol{e}_3$ i punti $Q - O = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$ dell'asse centrale soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} x &= \frac{3}{2} + 2\lambda \\ \\ y &= -\frac{19}{12} + 4\lambda \\ \\ z &= \frac{5}{3} + 2\lambda. \end{cases}$$

Per rispondere all'ultimo quesito osserviamo che, dal teorema del trasporto, si ottiene $\boldsymbol{M}_Q = -10\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3$. Oltre al risultante, applichiamo in Q un vettore $-\boldsymbol{v}$ per ora incognito e in un punto S incognito applichiamo il vettore $\boldsymbol{v}$. Occorre scegliere $\boldsymbol{v}$ e S in modo da avere

$$(S - Q) \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{M}_Q$$

e dunque bisogna soddisfare la condizione $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{M}_Q = 0$, ad esempio prendendo $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3$. Allora sarà

$$S - Q = \frac{1}{5}(8\boldsymbol{e}_1 - 25\boldsymbol{e}_2 - 8\boldsymbol{e}_3)$$

per cui $S - O = \frac{1}{5}(13\boldsymbol{e}_1 - 20\boldsymbol{e}_2 - 3\boldsymbol{e}_3)$ ed un sistema di vettori applicati con le proprietà richieste è

$$\Sigma' = \{(Q, \boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2), (S, \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3)\}.$$

Esercizio 1.3 *Determinare le coordinate (x, z) del punto di intersezione con l'asse $y = 0$ dell'asse centrale del seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y - 3\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_1 - O \equiv (2, 0, 0), \\ \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_2 - O \equiv (1, -1, 2), \\ \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{e}_x - 4\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \text{applicato in } P_3 - O \equiv (0, 3, 0). \end{cases}$$

Il risultante è $\boldsymbol{R} = 3\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z$, con modulo $|\boldsymbol{R}|^2 = 14$; il momento risultante rispetto ad O è $\boldsymbol{M}_O = 5\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z$. Poiché $\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{M}_O = -2\boldsymbol{e}_x + 16\boldsymbol{e}_y + 11\boldsymbol{e}_z$ i punti $Q - O = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$ dell'asse centrale soddisfano le equazioni

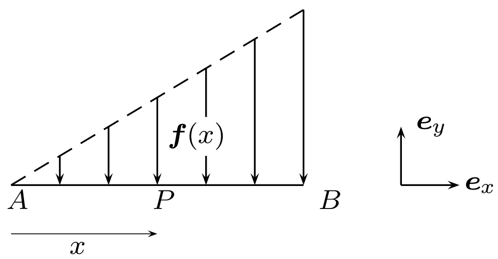
$$\begin{cases} x &= -\frac{1}{7} + 3\lambda \\ \\ y &= \frac{8}{7} - \lambda \\ \\ z &= \frac{11}{14} + 2\lambda. \end{cases}$$

Se poniamo $y = 0$ nella seconda di queste equazioni otteniamo il valore di $\lambda = \frac{8}{7}$ che individua il punto di intersezione tra l'asse centrale ed il piano $y = 0$. Sostituendo questo valore nelle equazioni restanti si ottengono i valori

$$x = \frac{23}{7} \qquad\qquad z = \frac{43}{14}$$

delle coordinate richieste.

Esercizio 1.4 *Su un segmento AB di lunghezza ℓ agisce un sistema continuo di vettori applicati, distribuito con densità $\boldsymbol{f}(x) = -p\frac{x}{\ell}\boldsymbol{e}_y$ dove la costante p ha le dimensioni di una forza ed x è la distanza da A del generico punto P di AB. Determinare risul-*



tante e momento risultante rispetto ad A del sistema di vettori applicati e trovare un sistema di vettori applicati ad esso equivalente, formato da un solo vettore.

Trattandosi di un sistema continuo, per calcolarne il risultante dobbiamo sostituire alla somma dei singoli vettori l'integrale della densità $\boldsymbol{f}$ su tutta la regione dove essa è diversa da $\mathbf{0}$; per calcolare il momento risultante rispetto ad A, dobbiamo integrare su AB il momento di $\boldsymbol{f}$ rispetto ad A. Abbiamo allora

$$\boldsymbol{R} = \int_0^\ell \boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x = -\frac{p}{\ell}\int_0^\ell x\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}x = -\frac{p}{2}\ell^2\boldsymbol{e}_y,$$

e

$$\boldsymbol{M}_A = \int_0^\ell x\boldsymbol{e}_x \wedge \boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x = -\frac{p}{\ell}\left(\int_0^\ell x^2\mathrm{d}x\right)\boldsymbol{e}_z = -\frac{p}{3}\ell^2\boldsymbol{e}_z.$$

L'ultimo quesito proposto ha senso perché il sistema in esame è formato da vettori paralleli e dunque il teorema di riduzione ne garantisce l'equivalenza con un unico vettore, pari ad $\boldsymbol{R}$, applicato in un punto dell'asse centrale. Sia $Q \in AB$ il punto di AB dove l'asse centrale, diretto come $\boldsymbol{e}_y$, interseca AB. Per determinare la posizione di Q dobbiamo risolvere l'equazione

$$(Q - A) \wedge \boldsymbol{R} = \boldsymbol{M}_A$$

o, posto $Q - A = \xi \boldsymbol{e}_x$,

$$\xi \boldsymbol{e}_x \wedge \frac{p}{2}\ell^2 \boldsymbol{e}_y = \frac{p}{3}\ell^2 \boldsymbol{e}_z$$

da cui si ottiene

$$\xi = \frac{2}{3}\ell.$$

1.3 Esercizi Proposti

Esercizio 1.5 *Trovare le coordinate* (y, z) *del punto di intersezione con il piano* $x = 0$ *dell'asse centrale del seguente sistema di vettori applicati:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (0, 2, 1), \\ \boldsymbol{v}_2 = -3\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (2, -1, 1), \\ \boldsymbol{v}_3 = -2\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y - 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (-1, 2, 2). \end{cases}$$

R: $y = \frac{71}{17}$, $z = \frac{14}{17}$.

Esercizio 1.6 *Determinare, per il seguente sistema di vettori applicati,*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (1, -2, 1), \\ \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (1, 0, 1), \\ \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (1, 1, 0) \end{cases}$$

il risultante, il momento risultante rispetto ad O*, il trinomio invariante e l'equazione dell'asse centrale. Determinare un sistema di vettori applicati, equivalente a quello proposto, formato da due vettori, di cui uno applicato in* $Q \equiv (1, 0, -1)$*.*

R: $\boldsymbol{R} = 3\boldsymbol{e}_x + 2\boldsymbol{e}_y + 2\boldsymbol{e}_z$; $\boldsymbol{M}_O = -8\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + 4\boldsymbol{e}_z$; $\mathcal{I} = -18$. Equazioni asse centrale: $x = \frac{10}{17} + 3\lambda$, $y = -\frac{28}{17} + 2\lambda$, $z = \frac{13}{17} + 2\lambda$.

Esercizio 1.7 *Determinare, per il seguente sistema di vettori applicati*

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_y + 3\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_1 - O \equiv (2, 0, 1), \\ \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_2 - O \equiv (1, 2, 0), \\ \boldsymbol{v}_3 = 3\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z & \textit{applicato in } P_3 - O \equiv (3, 2, 1). \end{cases}$$

il risultante, il momento risultante rispetto all'origine O*, il trinomio invariante e l'equazione dell'asse centrale. Trovare un altro sistema di vettori applicati, equivalente a quello assegnato, formato da due soli vettori, di cui uno applicato in* $Q \equiv (1, 1, 1)$*.*

R: $\boldsymbol{R} = 3\boldsymbol{e}_x + 4\boldsymbol{e}_y - 2\boldsymbol{e}_z$; $\boldsymbol{M}_O = -6\boldsymbol{e}_x + 6\boldsymbol{e}_y + 7\boldsymbol{e}_z$; $\mathcal{I} = -8$. Equazioni asse centrale: $x = \frac{40}{29} + 3\lambda$, $y = -\frac{9}{29} + 4\lambda$, $z = \frac{42}{29} - 2\lambda$