

Autorizzo la pubblicazione dell'esito dello scritto on-line

Firma: _____

Il tempo totale a disposizione è 3 ore.

PRIMA PARTE

1. Discutere l'algoritmo delle potenze ("power iteration") per il calcolo di autovalori e autovettori, ed in particolare:

- a. specificare l'input, l'output e descrivere l'algoritmo (in pseudocodice),
- b. enunciare e dimostrare il risultato di convergenza dell'autovettore *dominante* (cioè l'autovettore associato all'autovalore di massimo valore assoluto),
- c. descrivere (in pseudocodice) l'algoritmo delle potenze inverse ("inverse power iteration")

2.

- d. Si descriva il metodo di Jacobi per sistemi lineari. In particolare si riporti lo pseudo-codice del metodo e si discuta il costo computazionale di ogni iterazione.
- e. Si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza del metodo di Jacobi. Si descriva inoltre sotto quali condizioni la convergenza in norma euclidea è monotona.
- f. Sia $Ax = b$ un sistema lineare, con A simmetrica definita positiva, con $\lambda_{\max}(A) = 1$ e $\lambda_{\min}(A) = 0.01$. Usando il metodo dei Gradienti Coniugati, circa quante iterazioni sono necessarie per essere sicuri di ridurre l'errore in norma $\|\cdot\|_A$ di 6 ordini di grandezza?

SECONDA PARTE

3. Utilizzando il computer:

- g. implementare l'algoritmo delle potenze inverse in Matlab/Octave, mostrando in un grafico come l'errore numerico varia in funzione del numero di iterazioni;
- h. Si scriva una funzione `[x,iter,res] = Jacobi(A,b,x0,tol,maxits)` che implementi il metodo di Jacobi e che restituisca in output, oltre alla soluzione finale, il numero di iterazioni e il vettore delle norme del residuo $\|r_k\|$ per ogni iterazione. Si utilizzi la funzione scritta per risolvere il sistema

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

e si visualizzi un grafico con la storia di convergenza del residuo.