

Autorizzo la pubblicazione dell'esito dello scritto on-line

Firma: _____

Il tempo totale a disposizione è 3 ore.

PRIMA PARTE

1.

- a. Dare la definizione di quoziente di Rayleigh, discutendone la/le proprietà che si ritengono più significative.
- b. Se si approssima un autovalore utilizzando il quoziente di Rayleigh, cosa si può dire dell'errore che si commette? Dare una dimostrazione della stima d'errore che si propone.
- c. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};$$

quanto vale il quoziente di Rayleigh relativo ad A ? Commentare il risultato ottenuto.

2.

- d. Si specifichi cosa si intende per fattorizzazione LU di una matrice, distinguendo i casi senza pivoting, con pivoting parziale e con pivoting totale.
- e. Si calcoli la fattorizzazione LU della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -3 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

- f. Si consideri il sistema $Ax = b$, con A come nell'esercizio precedente e $b = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Si consideri

il sistema "perturbato" $A\tilde{x} = \tilde{b}$, dove $\tilde{b} = b + \begin{bmatrix} \epsilon \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Si calcolino le quantità

$$\frac{\|b - \tilde{b}\|_2}{\|b\|_2}, \quad \frac{\|x - \tilde{x}\|_2}{\|x\|_2}.$$

In base ai risultati ottenuti, cosa si può dire su $\kappa(A)$?

SECONDA PARTE

3. Utilizzando Matlab/Octave:

- g. Scrivere un codice che, data una matrice A e un vettore, calcoli il quoziente di Rayleigh
- h. Si mostri in un grafico la validità della stima di errore del punto b. Commentare brevemente nel file .m il risultato ottenuto (Suggerimento: scelti opportunamente una matrice A , possibilmente non diagonale, e dieci vettori w_i "vicini" ad un autovettore v della matrice A , diagrammare in scala logaritmica l'errore di approssimazione per l'autovalore in funzione dell'errore di approssimazione per l'autovettore)
- i. Si scriva una funzione che calcoli la fattorizzazione LU senza pivoting di una matrice. Si usi tale funzione per risolvere il sistema $Ax = b$, dove $A = \text{gallery}('poisson', 20)$, $b = (1, \dots, 1)^T$ e si verifichi la correttezza della soluzione calcolata misurando la norma del residuo relativo $\frac{\|b - Ax\|_2}{\|b\|_2}$