Algoritmo delle potenze simultanee

$\underline{Q}^{(0)} = Id \in \mathbb{R}^{m \times m}$; $A^{(0)} = A$, $R^{(0)} = Id$

for $k = 1 : n$

1. $Z = A\, \underline{Q}^{(k-1)}$
2. $\underline{Q}^{(k)} R^{(k)} = Z$ (fattorizzazione "qr" di Z)
3. $\underline{A}^{(k)} = \left(\underline{Q}^{(k)}\right)^T A\, \underline{Q}^{(k)}$
4. $\underline{R}^{(k)} = \ldots$ (come sotto)

end

Algoritmo QR

$A^{(0)} = A$, $Q^{(0)} = R^{(0)} = Id$

for $k = 1 : n$

5. $Q^{(k)} R^{(k)} = A^{(k-1)}$ (fattorizz. "qr" di $A^{(k-1)}$)
6. $A^{(k)} = R^{(k)} Q^{(k)}$
7. $\underline{Q}^{(k)} = Q^{(1)} Q^{(2)} \cdots Q^{(k)}$
8. $\underline{R}^{(k)} = R^{(k)} R^{(k-1)} \cdots R^{(1)}$

end

Nota: le definizioni in colore verde non fanno parte dell'algoritmo ma sono introdotte per dimostrare l'equivalenza

Teorema: I due algoritmi generano $\underline{R}^{(k)}$, $\underline{Q}^{(k)}$, $A^{(k)}$, le quali verificano la fattorizzazione QR

$$A^{k} = \underline{Q}^{(k)} \underline{R}^{(k)} \quad (9)$$

Inoltre vale

$$A^{(k)} = \left(\underline{Q}^{(k)}\right)^{T} A\, \underline{Q}^{(k)} \quad (10)$$

le matrici sono le stesse se A è non singolare.

dimostrazione (per induzione)

- se $k = 0$ allora $A^{0} = Id$, tutto torna
- suppongo che

$$A^{k-1} = \underline{Q}^{(k-1)} \underline{R}^{(k-1)} \quad e \quad A^{(k-1)} = \left(\underline{Q}^{(k-1)}\right)^{T} A\, \underline{Q}^{(k-1)}$$

- per il metodo delle potenze:

$$A^{k} = A A^{k-1} = A\, \underline{Q}^{(k-1)} \underline{R}^{(k-1)} \overset{(1)+(2)}{=} \underline{Q}^{(k)} R^{(k)} R^{(k-1)} \overset{(4)}{=} \underline{Q}^{(k)} \underline{R}^{(k)}$$

$$A^{(k)} = \left(\underline{Q}^{(k)}\right)^{T} A\, Q^{(k)} \quad (\text{direttamente da } (3))$$

- per l'algoritmo QR

$$A^{k} = A A^{k-1} = A \underline{Q}^{(k-1)} \underline{R}^{(k-1)}$$

$$= \left(\underline{Q}^{(k-1)}\right)\left(\underline{Q}^{(k-1)}\right)^{T} A\, \underline{Q}^{(k-1)} \underline{R}^{(k-1)} \overset{\text{ip. induzione}}{=} \underline{Q}^{(k-1)} A^{(k-1)} \underline{R}^{(k-1)}$$

$$= \underline{Q}^{(k-1)} \overset{(5)}{Q^{(k)} R^{(k)}} \underline{R}^{(k-1)} \overset{(7)+(8)}{=} \underline{Q}^{(k)} \underline{R}^{(k)}$$

Sempre con riferimento all'algoritmo QR,

$$A^{(k)} \overset{(6)}{=} R^{(k)} Q^{(k)} = \left(Q^{(k)}\right)^T Q^{(k)} R^{(k)} Q^{(k)}$$

$$\overset{\text{ip. induzione}}{=} \left(Q^{(k)}\right)^T A^{(k-1)} Q^{(k)}$$

$$\overset{\text{ip. induzione}}{=} \left(Q^{(k)}\right)^T \left(\underline{Q}^{(k-1)}\right)^T A \, \underline{Q}^{(k-1)} Q^{(k)}$$

$$\overset{(7)}{=} \left(\underline{Q}^{(k)}\right)^T A \, \underline{Q}^{(k)}$$

Quindi entrambi gli algoritmi generano matrici che verificano le identità (9) e (10).

Se A è non singolare, essendo la fattorizzazione QR unica allora (9) implica che $\underline{Q}^{(k)}$ e $\underline{R}^{(k)}$ generate dai due algoritmi sono le stesse.