

Esercizi MATLAB

1. Scrivere una funzione che prenda in input una matrice triangolare A $n \times n$ e un vettore $b \in \mathbb{R}^n$ e calcoli la soluzione del sistema lineare $Ax = b$. Come faccio a verificare se la soluzione calcolata è corretta, senza dover risolvere il sistema in un altro modo?
2. Scrivere due funzioni $[Q,R] = \text{clgs}(A)$ e $[Q,R] = \text{mgs}(A)$ che calcolano la fattorizzazione QR (ridotta) di una matrice A (in generale rettangolare) usando rispettivamente l'algoritmo di Gram-Schmidt e l'algoritmo di Gram-Schmidt modificato.

3. Sia

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}$$

Si calcoli la fattorizzazione QR (ridotta) di Z usando le funzioni `clgs`, `mgs` e la funzione di MATLAB $[Q,R] = \text{qr}(Z,0)$ per $\rho = 10^{-j}$, $j = 0, 1, \dots, 8$. Per ogni caso si calcoli l'errore di ortogonalizzazione $\|Q^T Q - I\|_2$, e si mostrino i risultati in un grafico in scala logaritmica (funzione `loglog`) avente ρ nelle ascisse e l'errore nelle ordinate. Si commentino i risultati.

4. Sia $m = 11$ e si considerino i punti $x_1 = -5$, $x_2 = -4, \dots, x_m = 5$. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-3, 0] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si calcolino i coefficienti dei polinomi di grado 7 e 10 che risolvono il problema ai minimi quadrati ottenuto approssimando la sequenza di punti $(x_i; f(x_i))$, $i = 1, \dots, m$ (si noti che nel secondo caso l'approssimazione è esatta). Visualizzare in un unico grafico, usando colori diversi, la funzione f e i due polinomi nell'intervallo $[-5; 5]$. Che cosa si osserva? Quale dei due polinomi sembra una migliore approssimazione di f ?

5. Sia $m = 50$, $n = 12$. Sia $f(t) = \cos(4t)$, si definiscano i punti $t_i = \frac{i-1}{m-1}$, $i = 1, \dots, m$, e sia b il vettore avente componenti $b_i = f(t_i)$. Sia A la matrice del problema ai minimi quadrati che si ottiene approssimando con un polinomio di grado $n - 1$ la sequenza di punti $(t_i; b_i)$, $i = 1, \dots, m$. Si risolva e si visualizzi (con tutte le 16 cifre decimali) la soluzione x del problema, calcolata con i seguenti metodi:

- Formazione e soluzione del sistema di equazioni normali, usando il comando MATLAB `\`.
- Fattorizzazione QR calcolata con `clgs`.
- Fattorizzazione QR calcolata con `mgs`.
- Fattorizzazione QR calcolata con la funzione MATLAB `qr`.
- $x = A \setminus b$ (questo comando è basato sulla fattorizzazione QR).
- SVD, usando la funzione MATLAB `svd`.

I calcoli precedenti genereranno cinque liste di 12 coefficienti. In ogni lista, si cancellino le cifre decimali che appaiono errate (affette da errori di arrotondamento). Le equazioni normali mostrano instabilità?