# Esercizi metodi iterativi per sistemi lineari

1. Mediante funzioni del tipo `x=Jacobi(A,b,x0,maxit,tol);`, implementa gli algoritmi di Jacobi e Gauss-Seidel. Si prenda come riferimento il seguente algoritmo (come criterio di arresto si usino $\|r_k\| \,/\, \|r_0\| \leq$ `tol` e `its > maxit`).

   Scelti $M$ (in $A = M - N$) e $x_0$, calcola $r_0$
   Per $k = 1, 2, \ldots,$ fino a convergenza:
   $x_k = x_{k-1} + M^{-1} r_{k_1}$
   $r_k = b - A x_k$

   Possibili comandi utili per ottenere le matrici di iterazione: `M=diag(diag(A))`; `M=tril(A)`.

2. Si applichino i due algoritmi al problema $Ax = b$ con

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad b = A * 1$$

   Si confronti la storia della convergenza del loro residuo mediante un grafico. Quanto vale il raggio spettrale delle matrici di iterazione?

3. Si applichino i due algoritmi al problema $Ax = b$ ($n = 30$), con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1.16 & & \\ 0.16 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1.16 \\ & & 0.16 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = A * 1$$

   Cosa osservi dai grafici di convergenza? Confronta $\rho(I - M^{-1}A)$ e $\|I - M^{-1}A\|_2$ per entrambi i metodi e commenta.

4. Scrivere una funzione `[x,its] = myCG(A,b,x0,maxit,tol)` che implementi il metodo dei Gradienti Coniugati che restituisca la soluzione approssimata e il numero di iterazioni effettuate.

5. Si risolva usando il metodo del Gradiente Coniugato il problema $Ax = b$, dove $A =$ `gallery('poisson',20)` e la soluzione esatta $x^*$ è un vettore generato casualmente di dimensione appropriata. Si confronti la storia di convergenza dell'errore con la stima di convergenza teorica. *Suggerimento:* Modificare la funzione scritta al punto precedente per restituire una matrice $X$ contenente tutte le iterate.

6. Costruire una matrice $A$ simmetrica definita positiva di dimensione $n = 100$ avente solo gli autovalori 1,2,3, 4 e 5 (ciascuno con molteplicitÃ 20) e matrice di autovettori random (si usi ad esempio `orth(rand(n))`). Risolvere il sistema lineare $Ax = b$, con $b = (1, ..., 1)^T$, Si visualizzi il grafico di convergenza del residuo.

7. Scrivere una funzione `[x,its] = myPCG(A,b,P,x0,maxit,tol)` che implementi il metodo del Gradiente Coniugato precondizionato, seguendo il seguente schema:

   $r_0 = b - Ax_0$, $z_0 = P^{-1}r_0$, $p_0 = z_0$
   Per $k = 1, 2, \ldots$ fino a convergenza:
   $\alpha_k = z_{k-1}^T r_{k-1} / p_{k-1}^T A p_{k-1}$
   $x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_{k-1}$
   $r_k = r_{k-1} - \alpha_k A p_{k-1}$
   $z_k = P^{-1} r_k$
   $\beta_k = z_k^T r_k / z_{k-1}^T r_{k-1}$
   $p_k = z_k + \beta_k p_{k-1}$

8. Per $k = 10, 20, ..., 100$ costruire la matrice $A =$ `gallery('wathen',k,k)`, e risolvere il sistema lineare $Ax = b$ con $b = (1, ..., 1)^T$ usando `myPCG` nei seguenti modi:

   - Nessun precondizionatore.
   - Precondizionatore di Jacobi: $D =$ `diag(diag(A))`.
   - Precondizionatore di Gauss-Seidel simmetrico: $(D + L)D^{-1}(D + L)^T$, con $L =$ `tril(A,-1)` (in questo caso potrebbe risultare conveniente non passare l'intera $P$ in input, ma piuttosto i suoi fattori $D$ e $L$, in modo da risolvere il sistema $Pz_k = r_k$ in maniera efficiente).

   Confrontare attraverso un grafico il numero di iterazioni dei diversi approcci al variare di $k$. In un altro grafico si confrontino i condizionamenti spettrali $\lambda_{\max}(P^{-1}A)/\lambda_{\min}(P^{-1}A)$.