

Esercizi MATLAB

1. Scrivere due funzioni che calcolino la fattorizzazione LU con e senza pivoting, rispettivamente. *Suggerimento:* nel caso di pivoting, per valutare la correttezza del proprio codice si confrontino i risultati con quelli ottenuti usando la funzione `lu` di MATLAB.
2. Scrivere una funzione che, presa in input una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non-singolare, ne calcoli l'inversa seguendo la seguente traccia.
L'inversa di A è la matrice X che verifica l'equazione $AX = I_n$. Le sue colonne x_1, \dots, x_n possono essere calcolate risolvendo tramite eliminazione di Gauss i sistemi lineari

$$Ax_j = e_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

dove e_j è il j -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^n . Qual'è il costo computazionale di questo metodo? Si noti che la fattorizzazione di A può essere calcolata una sola volta.

3. Scrivere una funzione che calcola il determinante di una matrice A usando la fattorizzazione $PA = LU$. Per calcolare il determinante di P , si modifichi la funzione scritta al punto 1) in modo da contare il numero di scambi di righe effettuati.
4. Per $n = 2^i$ con $i = 3, \dots, 10$, generare la matrice $A = \mathbf{randn}(n, n)$, e i vettori $x^* = \mathbf{randn}(n, 1)$ e $b = Ax^*$, Risolvere il sistema $Ax = b$ usando la fattorizzazione LU con e senza pivoting. Riportare in un grafico in scala log-log (funzione `loglog`) l'errore relativo della soluzione calcolata in funzione di n . Come si comporta l'errore nei due metodi? Nel caso del pivoting, in un altro grafico si confronti l'errore con $\rho \cdot \kappa(A) \cdot \epsilon_{mc}$, dove ϵ_{mc} è l'epsilon di macchina e

$$\rho = \frac{\max_{i,j} |u_{ij}|}{\max_{i,j} |a_{ij}|}$$