FEM in forma algebrica e assemblaggio

Metodo di Galerkin in forma astratta

Cerco $u_h \in V_h$: $a_h(u_h, v_h) = \langle f_h, v_h \rangle$, $\forall v_h \in V_h$

$$a_h(u_h, v_h) \approx \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla v_h \quad \text{oppure} \ldots\ldots$$

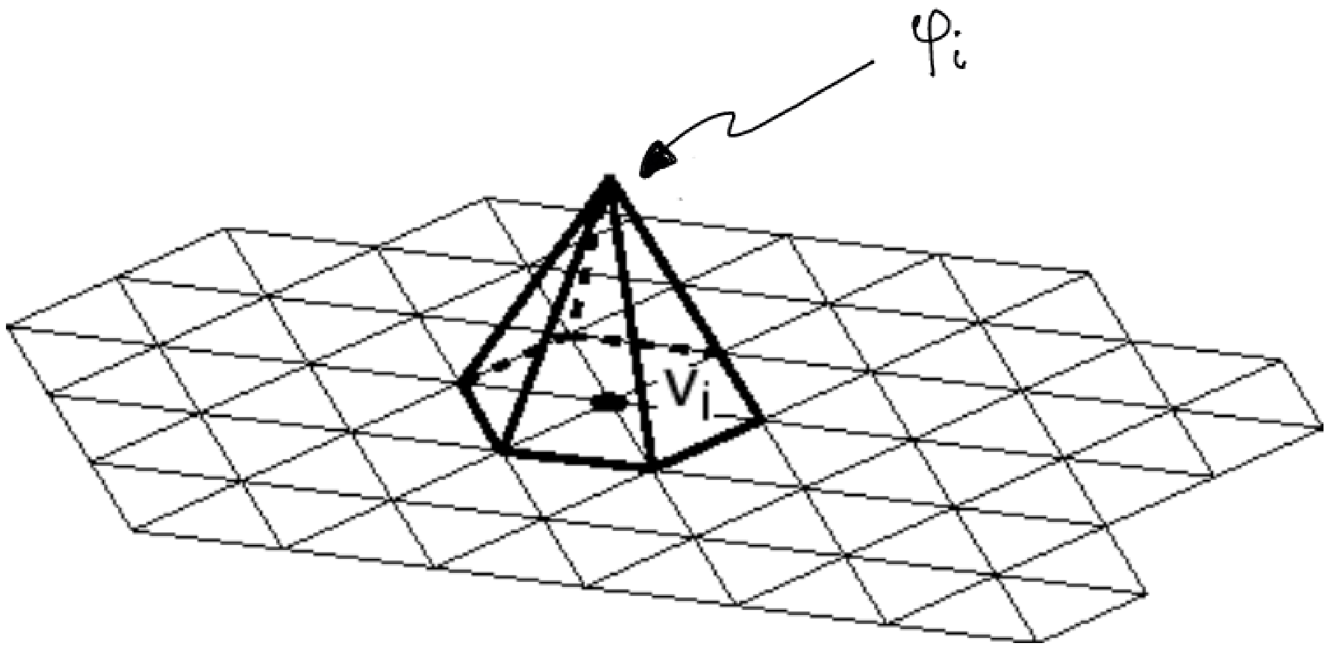
$$\langle f_h, v_h \rangle \approx \int_\Omega f \cdot v_h$$

V_h = spazio di funzioni finito dimensionale con condizioni al bordo (per esempio $= 0$ su $\partial\Omega$)

per FEM : V_h sono polinomi lineari a tratti su di una triangolazione $\mathcal{T}_h$ (+ condizioni al bordo)

V_h dispone di una base, cioè $V_h = \text{span}\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$

per i FEM P1 la base è costituita dalle hat-functions



Esercizio: costruire una triangolazione e visualizzare in sequenza le funzioni di base, distinguendo quelle di bordo (associate ai nodi $\in \partial\Omega$) e quelle interne (associate ai nodi $\in \mathring{\Omega}$)

Il sistema lineare.

Sia $u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i(x)$. La formulazione di Galerkin diventa:

Cerco $\underline{u} = [u_1, \dots, u_n]$: $a_h\left(\sum_J u_J \varphi_J, \varphi_i\right) = \langle f_h, \varphi_i \rangle$, $\forall i = 1, \dots, n$

se vale per tutte le funzioni di base φ_i allora vale per tutte le $v_h(x) = \sum v_i \varphi_i \dots$

equivalentemente

Cerco $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$: $\underbrace{\sum_J \underbrace{a_h(\varphi_J, \varphi_i)}_{A_{ij}} u_J = \underbrace{\langle f_h, \varphi_i \rangle}_{F_i}}$ $\forall i : 1 \dots n$

stiffness matrix $\longrightarrow$ $\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \underline{F}$ $\longleftarrow$ load vector

Assemblaggio della matrice A

$$a_h(\varphi_j, \varphi_i) = \int_\Omega \nabla\varphi_j \circ \nabla\varphi_i = \sum_T \int_T \nabla\varphi_j \circ \nabla\varphi_i$$

- loop ovvio ma dispendioso

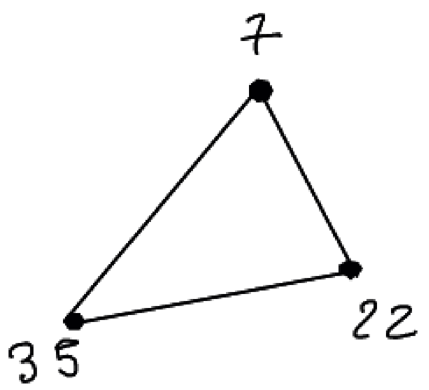
```
for i = 1:n
   for j = 1:n
      for T ∈ 𝒯h
         Aij = Aij + ∫_T ∇φi ∘ ∇φj
      end
   end
end
```

- loop più efficiente

for $T \in \mathcal{T}_h$
  for $i = ??$ $j = ??$
    $A_{ij} = A_{ij} + \int_T \nabla\varphi_i \cdot \nabla\varphi_j$
  end
end

quali indici i, j devo considerare?

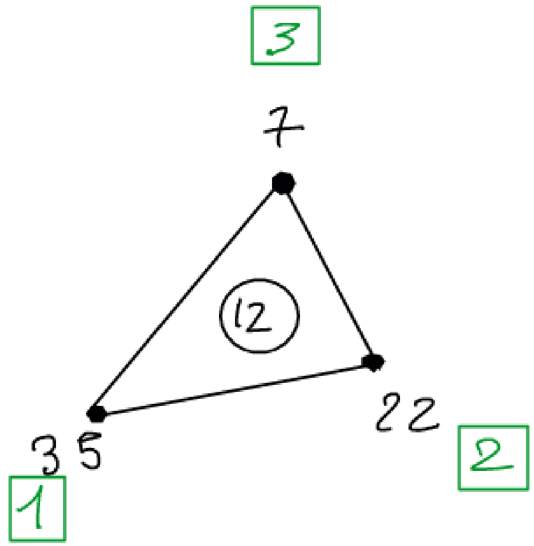
Se sto considerando un certo triangolo T, solo le funzioni di base associate ai suoi vertici danno un contributo non nullo all' $\int_T \ldots$



$\int_T \nabla\varphi_7 \cdot \nabla\varphi_{35}$ sarà da calcolare

$\int_T \nabla\varphi_9 \cdot \nabla\varphi_{22} = 0$ ovviamente
($\mathrm{supp}\, \varphi_9 \cap T = \emptyset$)

se t è la matrice di incidenza triangoli-vertici, allora i tre vertici del triangolo hanno indici globali sulla riga di t



Nel caso in figura sto considerando il triangolo n° 12 e dunque i suoi vertici hanno coordinate

$$t(12, 1) = 35$$

$$t(12, 2) = 22$$

$$t(12, 3) = 7$$

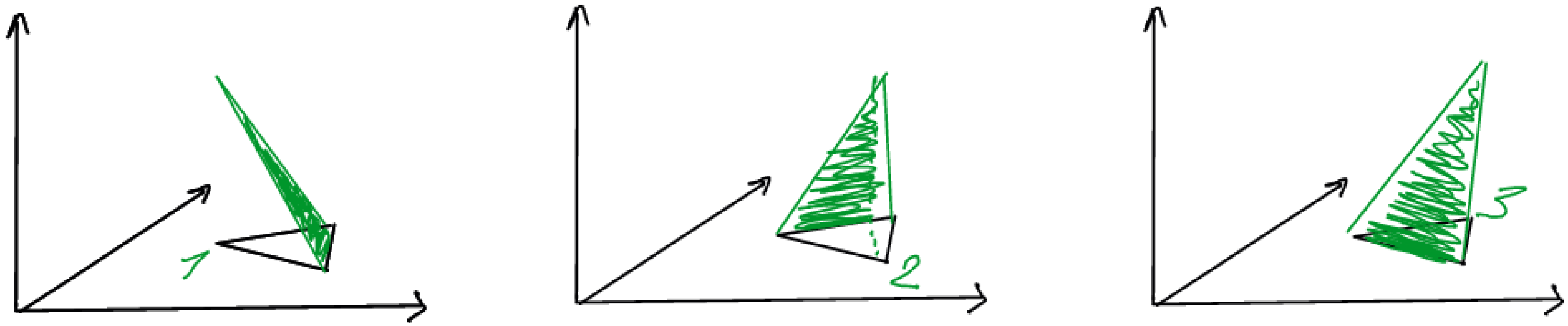
indice globale

indice locale

dunque faremo il loop sugli indici locali

for $T \in \mathcal{T}_h$
  for $i_{loc} = 1:3$
    for $j_{loc} = 1:3$
      $i_{glob} = t(T, i_{loc})$
      $j_{glob} = t(T, j_{loc})$
      $A_{i_{glob}, j_{glob}} = A_{i_{glob}, j_{glob}} + \int_T \nabla \varphi_{i_{loc}} \cdot \nabla \varphi_{j_{loc}}$
    end
  end
end

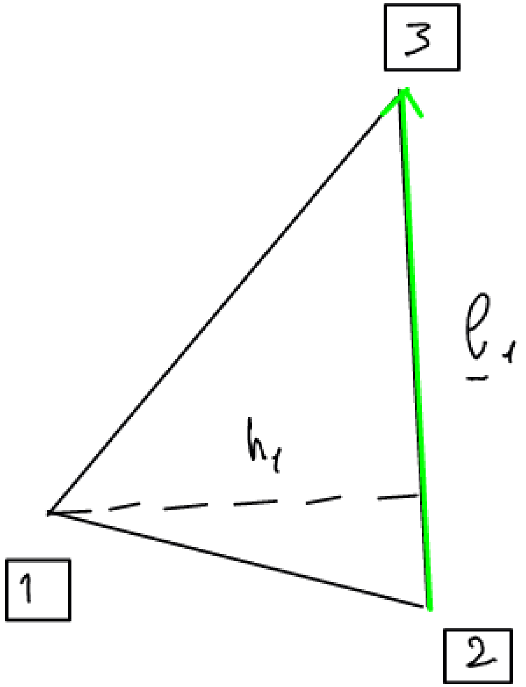
indicizzazione rispetto alle coordinate locali



Ci rimane ora da calcolare $\int_T \nabla\varphi_i \circ \nabla\varphi_j$. Il calcolo in questo caso semplice si può fare a mano, non servono formule di quadratura.

$\nabla\varphi_i$ dipende unicamente dalla geometria del triangolo ....

Esercizio: calcolare i tre gradienti $\nabla\varphi_1$, $\nabla\varphi_2$, $\nabla\varphi_3$ (prima ragionare sulla direzione e poi sul modulo) in funzione dei lati (vettori) e dell'area di T



φ_1 è 0 sul lato $\underline{l}_1$ (che penso orientato dal vertice 2 al vertice 3) quindi $\nabla\varphi_1$, che è un vettore costante nel triangolo, è ortogonale a $\underline{l}_1$ e diretto verso $\boxed{1}$, quindi

$\nabla\varphi_1$ è diretto e orientato come $\mathrm{rot}(\underline{l}_1)$, rot essendo il ruotato di $\pi/2$ in senso antiorario

Essendo $\nabla\varphi_1$ costante, allora $\|\nabla\varphi_1\| = \frac{1}{h_1}$ (questa è la derivata direzionale nella direzione di $\nabla\varphi_1$, cioè nella direzione dell'altezza). Dunque

$$\|\nabla\varphi_1\| = \frac{1}{\|h_1\|} = \frac{\|\underline{l}_1\|}{2|T|}, \quad \text{dove } |T| = \text{area triangolo}$$

e quindi
$$\nabla\varphi_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}(\underline{l}_1)\cdot|T|^{-1}$$

analogamente per $\nabla\varphi_2$ e $\nabla\varphi_3$, quindi:

$$\nabla\varphi_i = \frac{rot(\underline{\ell}_i)}{2\,|T|}$$

e quindi

$$\nabla\varphi_i \circ \nabla\varphi_j = \frac{rot(\underline{\ell}_i) \circ rot(\underline{\ell}_j)}{4\,|T|^2} = \frac{\underline{\ell}_i \circ \underline{\ell}_j}{4\,|T|^2}$$

infine:

$$\boxed{\int_T \nabla\varphi_i \circ \nabla\varphi_j = |T|\,\nabla\varphi_i \circ \nabla\varphi_j = \frac{1}{4\,|T|}\,\underline{\ell}_i \circ \underline{\ell}_j}$$

L'assemblaggio del termine noto è analogo, ma per

$$\int_T f \cdot \varphi_i$$

si usa una formula di quadratura, ad esempio punto medio:

$$\int_T f \cdot \varphi_i = |T| \cdot f(b_T)\, \varphi_i(b_T) = \frac{|T|}{3} f(b_T)$$

Esercizio: Assemblare la matrice $\left[\int_\Omega \nabla\varphi_j \cdot \nabla\varphi_i\right] = \tilde{A}_{ij}$ calcolarne (con matlab) il nucleo.

(con i,j = indici di tutti i vertici della mesh)

Alcuni controlli che si possono fare sulla matrice $\tilde{A}$:

- $\tilde{A}$ è una matrice simmetrica: $\tilde{A} - \tilde{A}^T = 0$
- $\tilde{A}$ è una matrice semidefinita positiva

$$\underline{v}\,\tilde{A}\,\underline{v} = \sum_{ij} v_i \tilde{A}_{ij} v_j = a_h\left(\sum_i v_i \varphi_i(x,y), \sum_j v_j \varphi_j(x,y)\right)$$

$$= \int_\Omega \nabla v(x,y) \cdot \nabla v(x,y) \geq 0, \text{ dove } v(x,y) = \sum_i v_i \varphi_i(x,y).$$

quindi si possono calcolare gli autovalori di $\tilde{A}$ e controllarne il segno

- inoltre dal punto precedente si deduce che il nucleo di $\tilde{A}$ è unidimensionale e contiene il vettore costante (a cui corrisponde la funzione costante)

Riordinamento dei nodi e riorientamento dei triangoli

È utile riordinare i nodi in modo da avere prima quelli interni e alla fine quelli di bordo, inoltre è utile orientare i triangoli in senso antiorario. Scrivere una routine matlab che modifica l'output del triangolatore

```
[p,t] = distmesh (....)
[p,t] = riordina (p,t)
```

Suggerimento: usare la sintassi

M(vett_righe, vett_col) per riordinare la matrice M secondo gli indici dei vett_righe e vett_col ....

Imposizione delle condizioni al bordo

- condizioni di Dirichlet omogenee.

Lo spazio V_h in questo caso contiene le funzioni nulle su $\partial\Omega$, pertanto $V_h = \text{span}\{\varphi_i : \underbrace{v_i \notin \partial\Omega}_{\text{nodi sul bordo}}\}$

L'assemblaggio invece ha riguardato anche gli indici di bordo (infatti non conviene distinguere tra indici interni e indici di bordo durante l'assemblaggio)

Dobbiamo ora semplicemente buttare le righe e colonne che corrispondono agli indici di bordo.
In matlab, se I è un vettore di indici, la matrice $M(I,I)$ è la sottomatrice di M che corrisponde agli indici di I.

Esercizio: verificare che $M(I,I)$ ha $\ker = \{\emptyset\}$
(con I = indici dei nodi interni)

Condizioni al bordo non omogenee

Se $u|_{\partial\Omega} = g$ possiamo "rilevare" $g: \partial\Omega \to \mathbb{R}$ all'interno costruendo $\tilde{g}: \Omega \to \mathbb{R}$ (tale che $g = \tilde{g}$ su $\partial\Omega$) e quindi possiamo considerare $u - \tilde{g} = \tilde{u}$ come incognita con condizioni al bordo omogenee ($= 0$)

Cerco $u = \tilde{u} + \tilde{g}$ tale che $a(\tilde{u} + \tilde{g}, v) = \langle f, v \rangle, \ \forall v$

dove

$\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ sono nulle al bordo

$$a(\tilde{u} + \tilde{g}, v) = \int_\Omega \nabla(\tilde{u} + \tilde{g}) \cdot \nabla v$$

$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega f v$$

portando i termini noti a secondo membro otteniamo:

basterà prendere $v = \varphi_i$

Cerco $\tilde{u}$: $a(\tilde{u}, v) = \langle f, v \rangle - a(\tilde{g}, v)$, $\forall v$ ($\tilde{u}$ e $v = 0$ su $\partial\Omega$)

Come si calcola $\tilde{g}$ nel MEF? la strada più semplice è di porre $g = \tilde{g}$ sui nodi di bordo e $\tilde{g} = 0$ nei nodi interni (si noti che in questo modo $g = \tilde{g}$ su $\partial\Omega$ solo se g è lineare a tratti, altrimenti $\tilde{g}$ è una interpolata di g su $\partial\Omega$)

Siano n = numero totale dei vertici, I = vettore indici interni e B = vettore indici di bordo (naturalmente "$I \cup B = [1, \dots, n]$")

allora $\tilde{g}(x,y) = \sum_{j \in B} g_j \varphi_j(x,y)$ e in forma matriciale:

$$a(\tilde{g}, \varphi_i) = \sum_{j \in B} a(\varphi_j, \varphi_i) g_j = A_{iB} \, g_B$$

analogamente $\tilde{u} = \sum_{j \in I} u_j \varphi_j$ e $a(\tilde{u}, \varphi_i) = \sum_{j \in I} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j$

I = vettore indici interni

B = vettore indici di vertici al bordo

Il problema: cerco $\tilde{u}$: $a(\tilde{u}, v) = \langle f, v \rangle - a(\tilde{g}, v)$, $\forall v = \varphi_i$
$i \in I$

$$A = \begin{bmatrix} A_{II} & A_{IB} \\ A_{BI} & A_{BB} \end{bmatrix}$$

matrice completa
dopo l'assemblaggio

assumo che gli indici siano ordinati mettendo prima
gli indici interni e poi gli indici di bordo

$$\boxed{A_{II}\, u_I = F_I - A_{IB}\, g_B}$$