Integrazione per parti e formulazione variazionale

Integrazione per parti in 1D

Siano f e g due funzioni continue su $[0,1]$ con derivata continua. Allora vale

$$\int_0^1 f'(x)\, g(x)\, dx = f(1)\, g(1) - f(0)\, g(0) - \int_0^1 f(x)\, g'(x)\, dx$$

la dimostrazione utilizza il teo. fond. del calcolo integrale e la regola di derivazione del prodotto:

$$\int_0^1 f'g + \int_0^1 fg' = \int_0^1 (fg)' = \left[fg\right]_{x=0}^{x=1} = f(1)\,g(1) - f(0)\,g(0).$$

Integrazione per parti in 2D (idem in 3D)

Supponiamo ora che $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $\underline{f} : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ (con f e g regolari quanto serve)

$$\int_\Omega \operatorname{div} \underline{f} \cdot g = \int_{\partial\Omega} \underline{f} \cdot \underline{n} \cdot g - \int_\Omega \underline{f} \cdot \underline{\nabla} g.$$

ricordo il significato dei seguenti operatori differenziali:

gradiente: $\underline{\nabla} g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y} \right)$

divergenza: $\operatorname{div} \underline{f} = \underline{\nabla} \circ \underline{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$

che si combinano nell' operatore diff. del $\underline{\text{II}}$ ordine:

Laplaciano: $\Delta g = \operatorname{div} \underline{\nabla} g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

dalla formula di integrazione per parti si ha:

$$\boxed{\int_\Omega (\Delta u)\, v = \int_{\partial\Omega} (\underline{\nabla} u \cdot \underline{n})\, v - \int_\Omega \nabla u \circ \nabla v}$$

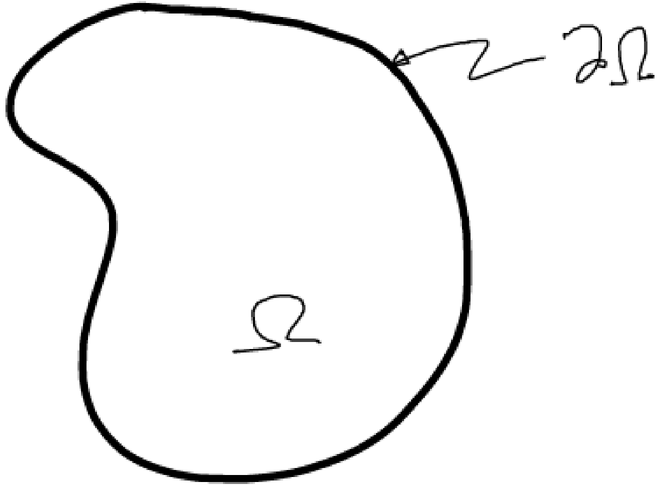
il termine di "bordo" si annulla se, ad esempio, $v|_{\partial\Omega}$ si annulla

esercizio dimostrare la formula di integrazione per parti in 2D partendo dal Teorema di Gauss e dalla regola di derivazione del prodotto

Il problema di Poisson e la sua formulazione variazionale

Si cerca una funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ chiuso e limitato) suffic. regolare che sia soluzione dell'equazione alle derivate parziali:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{nel dominio } \Omega \\ u = g & \text{sul bordo } \partial\Omega \end{cases}$$



Il problema di Poisson modellizza importanti problemi fisici (eq. del calore, eq. della membrana elastica lineare, equazione dell'elettrostatica) e rappresenta un problema "modello" per fenomeni fisici più complicati (ad esempio: problema della deformazione elastica di solidi, eventualmente in regime di grandi deformazioni)

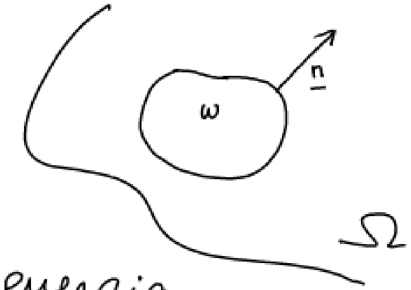
Capire come risolvere il prob. di Poisson è il primo passo

Es. n. 1: equazione del calore. Sia u la temperatura in un corpo conduttore Ω. La legge di Fourier dice che il flusso di calore è proporzionale al gradiente di temperatura

$$\underline{q} = -K\nabla u .$$

In ogni porzione $\omega \subset \Omega$ vale la conservazione dell'energia:

$$\int_{\partial\omega} \underline{q}\cdot\underline{n} = \int_{\omega} f$$



dove f rappresenta una densità di energia termica immessa dall'esterno

Usando il teorema di Stokes

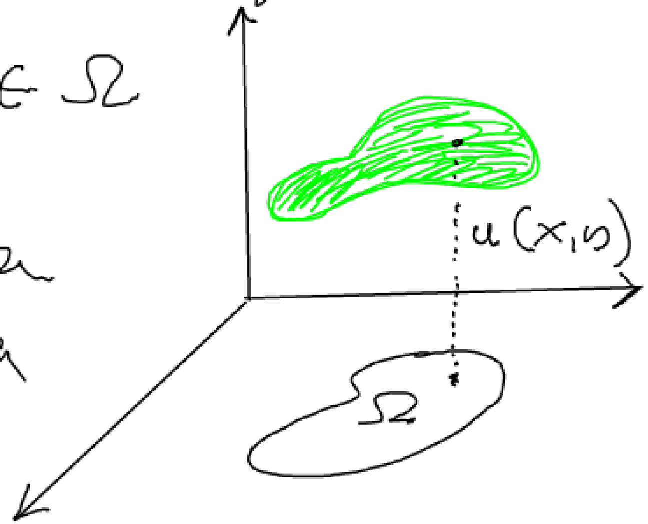
$$\int_{\partial\omega} \underline{q}\cdot\underline{n} = \int_{\omega} \operatorname{div} \underline{q}$$

e dato che i sottodomini ω sono arbitrari, se ne deduce $\quad -\operatorname{div} K\nabla u = \operatorname{div} \underline{q} = f$

quindi se $K=1$ $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{temperatura al bordo } \partial\Omega \text{ assegnata.} \end{cases}$

Es. n. 2 : equazione della membrana elastica

la membrana è rappresentata dal grafico di u
cioè è l'insieme dei punti
$(x,y,u(x,y)) \in \mathbb{R}^3$, con $(x,y) \in \Omega$



Si dimostra che se la membrana viene deformata di poco, allora:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{sul bordo } \partial\Omega \end{cases}$$

(eq. di Laplace)

Sia u soluzione del prbl. di Poisson. Sia $v : \Omega \to \mathbb{R}$ una qualunque funzione nulla su $\partial\Omega$; moltiplico la equazione per v ed integro

$$(-\Delta u) \cdot v = f \cdot v$$

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot v = \int_\Omega f \cdot v$$

quindi integro per parti e ottengo

$$\int_\Omega \nabla u \circ \nabla v - \underbrace{\int_{\partial\Omega} (\underline{\nabla} u \circ \underline{n})\, v}_{=0 \text{ dato che } v|_{\partial\Omega} = 0} = \int_\Omega f \cdot v$$

formulazione variazionale: Cerco $u : \Omega \to \mathbb{R}$ suffic. regolare e con il vincolo $u = g$ su $\partial\Omega$, t.c.

$$\int_\Omega \underline{\nabla} u \circ \nabla v = \int_\Omega f \cdot v \,, \qquad \forall v : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ regolare}, \quad v|_{\partial\Omega} = 0$$

u è la soluzione, detta anche "trial function" v è la "test function". Se u è suffic. regolare, si dimostra che

u è soluzione "classica" $\Longleftrightarrow$ u è soluzione della formulazione variazionale

l'ipotesi di "regolarità" si esprime con la nozione di spazio di Sobolev: $u, v \in H^1(\Omega)$

$$v \in L^2(\Omega) \iff \underbrace{\int v^2(x,y)\,dx\,dy}_{\|v\|^2_{L^2}} < +\infty$$

$$v \in H^1(\Omega) \iff v \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega)$$

$$\|v\|^2_{H^1} = \|v\|^2_{L^2} + \underbrace{\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|^2_{L^2} + \left\|\frac{\partial v}{\partial y}\right\|^2_{L^2}}$$

$$\|\nabla v\|^2_{L^2} = \int_\Omega (\nabla v \circ \nabla v)\, dx\,dy$$

$\|v\|^2_{H^k}$ = Somma dei quadrati delle norme L^2 di funzione e derivate fino all'ordine k

$$H^1_0 = \{ v \in H^1 \text{ tali che } v|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

Si dimostra che:

$u \in H^1_0$ verifica $\int_\Omega \nabla u \circ \nabla v = \int_\Omega f \cdot v \,, \quad \forall v \in H^1_0$

se e soltanto se

u è la funzione in $H^1_0(\Omega)$ che minimizza il funzionale

$$\phi(w) = \frac{1}{2} \int |\nabla w|^2 - \int f w$$

inoltre se u è sufficientemente regolare, e se vale quanto sopra allora u è soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$