Tests numerici sul problema di Poisson

Es. 1 risolvere numericamente il pbl.:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{su } \Omega = \text{cerchio unitario} \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega = \text{circonferenza unitaria} \end{cases}$$

la soluzione esatta per $f = 1$ è $u(x,y) = -\frac{1}{4}(x^2+y^2)+\frac{1}{4}$;
infatti $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{2}$; $-\Delta u = 1$

Calcolare u_h con il M.E.F. (metodo degli elementi finiti)
e diagrammare $\|u-u_h\|_{L^2}$ e $|u-u_h|_{H^1}$ in funzione di h
(usare la scala logaritmica)

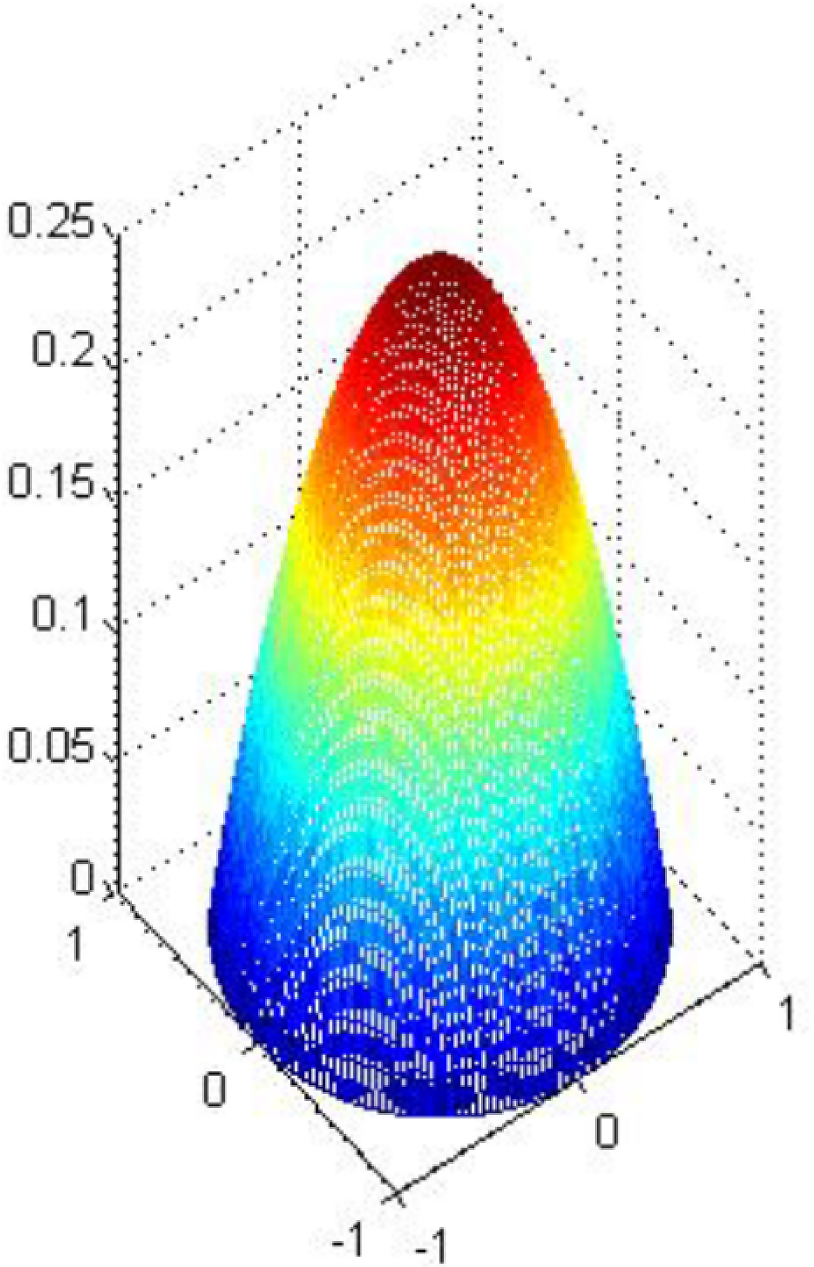


grafico della soluzione esatta e, se non ci sono errori nel codice, grafico della soluzione del metodo degli elementi finiti

Si ricorda che

$$\|\varphi\|_{L^2} = \left(\int_\Omega \varphi^2(x,y)\, dxdy \right)^{1/2}$$

$$|\varphi|_{H^1} = \|\nabla\varphi\|_{L^2} = \left(\int_\Omega \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 \right)^{1/2}$$

e

$$\|\varphi\|_{H^1} = \left(\|\varphi\|_{L^2}^2 + |\varphi|_{H^1}^2 \right)^{1/2}$$

e che gli integrali si possono calcolare con una formula di quadratura.

I passi da svolgere sono:

1) risolvere il sistema lineare $\underline{\underline{A}}_{II} \, \underline{u}_I = \underline{F}_I$
(ricordo che I significa "indici interni")

2) ricostruire il vettore $\underline{u} = [\underline{u}_I \;\; \underline{u}_B]$ con $\underline{u}_B = \underline{0}$

3) fare il diagramma di $u_h = \sum u_i \varphi_i$ e della interpolata della soluzione esatta $\pi u = \sum u(p_i) \varphi_i$

4) Calcolare l'errore:

4.1) $\max_i |u_i - u(p_i)| \simeq \| u_h - u \|_{L^\infty}$

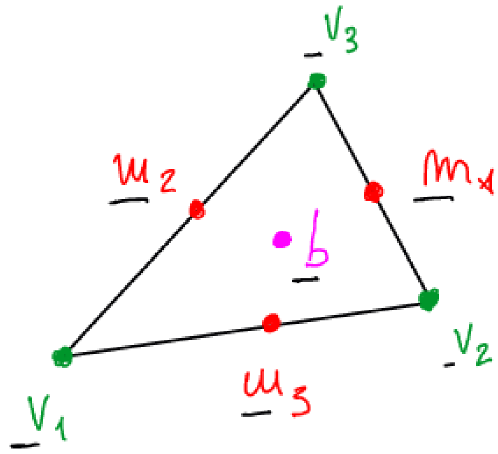
4.2) $\sqrt{\sum_T |T| \left(u_h(b_T) - u(b_T) \right)^2} \simeq \| u_h - u \|_{L^2}$

4.3) facoltativo: $\| u_h - u \|_{H^1}$

4.4) costruire un grafico errore vs h
(dove h va calcolato come "max lung. lati")
e stimare l'ordine di accuratezza del metodo.

Come si calcola u_h nei punti di quadratura?

u_h è nota nei vertici V_1, V_2, V_3.



Essendo lineare affine, cioè

$$u_h(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma, \quad \text{se } (x,y) \in T$$

allora

$$u_h(\underline{m}_1) = u_h\left(\frac{\underline{V}_2 + \underline{V}_3}{2}\right) = \alpha\left(\frac{V_{2,x} + V_{3,x}}{2}\right) + \beta\left(\frac{V_{2,y} + V_{3,y}}{2}\right) + \gamma$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha V_{2,x} + \beta V_{2,y} + \gamma\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha V_{3,x} + \beta V_{3,y} + \gamma\right) = \frac{1}{2}\left(u_h(\underline{V}_2) + u_h(\underline{V}_3)\right)$$

analogamente

$$u_h(\underline{b}) = u_h\left(\frac{\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(u_h(\underline{V}_1) + u_h(\underline{V}_2) + u_h(\underline{V}_3)\right)$$

Es. 2 Condizioni al bordo non omogenee

Ci si può inventare un problema con soluzione nota

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

partendo dalla soluzione stessa e calcolando $f \; (= -\Delta u)$ e $g \; \left(= u\big|_{\partial\Omega}\right)$

Provare un esempio con u non polinomiale ...
di aggiornare come nell'esercizio precedente l'errore in funzione di h