Analisi dell'errore per FEM in 1D

Consideriamo il problema modello

$$\begin{cases} -\left(k(x)\, u'(x)\right)' = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

dove si chiede $k_{max} \geq k(x) \geq k_{min} > 0, \quad \forall x \in (0,1)$ (1)

La formulazione variazionale è:

Cerco $u \in H^1_0$: $\forall v \in H^1_0$, $\underbrace{\int_0^1 k(x)\, u'(x)\, v'(x)\, dx}_{a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx}_{\langle f, v\rangle}$

formulazione variazionale $\quad a(u,v) = \langle f, v\rangle$

dove $H^1_0 = H^1_0(0,1) = \left\{ v \in L^2(0,1) : v' \in L^2(0,1) \text{ e } v(0) = v(1) = 0 \right\}$

Il metodo elem. finiti è:

Cerco $u_h \in V_h$: $\forall v \in V_h$, $a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle$

metodo di Galerkin

Il teorema fondamentale è il cosiddetto Lemma di Céa, che chiede in ipotesi le proprietà:

- coercività della forma bilineare $a(\cdot,\cdot)$
- continuità " " "
- proprietà di ortogonalità di Galerkin.

coercività di $a(\cdot,\cdot)$

Si dice che a è coerciva (su H^1_0) se

$$\exists \alpha > 0 : \forall v \in H^1_0 \quad a(v,v) \geq \alpha \, \|v\|^2_{H^1} = \alpha \left(\|v\|^2_{L^2} + \|v'\|^2_{L^2} \right)$$

dimostrazione: per la definizione di $a(\cdot,\cdot)$ e l'ipotesi (1), vale

$$\forall v \in H^1 , \quad a(v,v) = \int_0^1 k(x) (v'(x))^2 \, dx$$

$$\geq k_{min} \int_0^1 (v'(x))^2 dx \qquad (2)$$

$$\geq k_{min} \|v'\|^2_{L^2} + \dots ?$$

Vale inoltre la cosiddetta disuguaglianza di Poincaré:

Poincaré $\left\{ \exists \, C_P > 0 : \forall v \in H^1_0 , \quad \|v\|^2_{L^2(0,1)} \leq C_P \|v'\|^2_{L^2(0,1)} \right.$

infatti

$$\|v\|^2_{L^2} = \int_0^1 (v(x))^2 dx = \int_0^1 (v(x))^2 \left(x - \tfrac{1}{2}\right)' dx \xrightarrow{\text{integrando per parti}}$$

$$= - \int_0^1 \left((v(x))^2\right)' \cdot \left(x - \tfrac{1}{2}\right) dx + \left[(v(x))^2 \left(x - \tfrac{1}{2}\right) \right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \qquad \parallel \qquad + \qquad 0$$

$$= \int_0^1 2\, v(x)\, v'(x) \cdot \left(x - \tfrac{1}{2}\right) dx$$

$$\leq \max_{x \in (0,1)} 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right) \int_0^1 |v(x)| \, |v'(x)| \, dx \leq \dots$$

$$\leq 1 \cdot \|v\|_{L^2(0,1)} \cdot \|v'(x)\|_{L^2(0,1)} \; ;$$

riassumendo

$$\|v\|^2_{L^2(0,1)} \leq \|v\|_{L^2(0,1)} \|v'(x)\|_{L^2(0,1)}$$

dividendo entrambi i membri per $\|v\|_{L^2(0,1)}$ otteniamo

$$\|v\|_{L^2(0,1)} \leq \|v'(x)\|_{L^2(0,1)} \qquad (3)$$

Osservazioni: 1) Vale qui con $C_p = 1$, ma vedremo poi che vale più in dimensione > 1 e in generale C_p dipende dal dominio

2) non vale per $v \in H^1$, cioè senza condizioni al bordo.

Con (2) e (3) si ottiene

$$\forall v \in H^1_0, \quad a(v,v) \geq k_{min} \|v'\|^2_{L^2} =$$

$$= k_{min} \left(\frac{1}{2} \|v'\|^2_{L^2} + \frac{1}{2} \|v'\|^2_{L^2} \right)$$

$$\geq \frac{k_{min}}{2} \underbrace{\left(\|v\|^2_{L^2} + \|v'\|^2_{L^2} \right)}_{\|v\|^2_{H^1}}$$

continuità di $a(\cdot,\cdot)$

Si dice che a è continua su H^1_0 se

$\exists M \in \mathbb{R} : \quad \forall w, v \in H^1_0, \quad |a(w,v)| \leq M \|w\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$

dimostrazione: è conseguenza della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\forall f, g \in L^2 \qquad \int_0^1 f \cdot g \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$$

Infatti

$$|a(w,v)| = \left| \int_0^1 k(x) w'(x) v'(x) dx \right| \leq$$

$$\int_0^1 |k| \, |w'| \, |v'| \leq \|k\|_{L^\infty} \int |w'| \, |v'|$$

$$\leq k_{max} \|w'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2}$$

$$\leq k_{max} \|w\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

ortogonalità di Galerkin

Vale che $\forall v_h \in V_h, \quad a(u - u_h, v_h) = 0$

dove u e u_h sono soluzioni della formulazione variazionale e del metodo di Galerkin dimostrazione: fissata $v_h \in V_h$, si ha

$$\forall v \in H^1_0, \quad a(u,v) - \langle f, v \rangle = 0$$

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) - \langle f, v_h \rangle = 0$$

dato che $V_h \subseteq H^1_0$, nella prima posso senz'altro prendere $v_h \in V_h \subset H^1_0$ e scrivere

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u, v_h) - \langle f, v_h \rangle = 0$$

sottraendo la precedente e usando la (bi) linearità, si ottiene:

$$\underbrace{a(u, v_h) - a(u_h, v_h)}_{= a(u-u_h, v_h)} = 0$$

Lemma di Céa: se la forma a è continua e coerciva (con costanti M e $\alpha > 0$), allora

$$\|u - u_h\|_{H^1} \le \frac{M}{\alpha} \underbrace{\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1}}_{\text{errore di miglior approssim.}}$$

Osservazioni: il termine $\inf\limits_{v_h \in V_h} \| u - v_h \|_{H^1}$ rappresenta l'errore di "miglior approssimazione" di u rispetto allo spazio V_h. Meglio di così non si può fare con funzioni di V_h.

<u>dimostrazione</u>: data $v_h \in V_h$ arbitraria

$$\| u - u_h \|_{H^1}^2 \leq \frac{1}{\alpha} a(u-u_h, u-u_h) \qquad \text{(coercività)}$$

$$= \frac{1}{\alpha} a(u-u_h, u - v_h + v_h - u_h)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \left(a(u-u_h, u-v_h) + a(u-u_h, v_h - u_h) \right) \qquad \text{(linearità)}$$

$$= \frac{1}{\alpha} a(u-u_h, u-v_h) \qquad \text{(ortogon. Gal.)}$$

$$\leq \frac{M}{\alpha} \| u - u_h \|_{H^1} \| u - v_h \|_{H^1} \qquad \text{(continuità)}$$

Quindi $\| u - u_h \|_{H^1}^2 \leq \frac{M}{\alpha} \| u - u_h \|_{H^1} \| u - v_h \|_{H^1}$

la tesi segue dividendo per $\| u - u_h \|_{H^1}$:

$$\| u - u_h \|_{H_0^1} \leq \frac{M}{\alpha} \| u - v_h \|_{H^1}$$

e, considerando che vale $\forall v_h \in V_h$, passando all'estremo inferiore

<u>Osservazione:</u> nel nostro caso, $\alpha = k_{min}$ e $M = k_{max}$, dunque vale

$$\|u-u_h\|_{H^1} \leq \frac{k_{max}}{k_{min}} \inf_{v_h} \|u-v_h\|$$

<u>Osservazione</u> il teorema vale in un contesto più generale: H^1_0 può essere sostituito con uno spazio (di Hilbert), coercività e continuità sono da esprimersi rispetto alla $\|\cdot\|_V$.

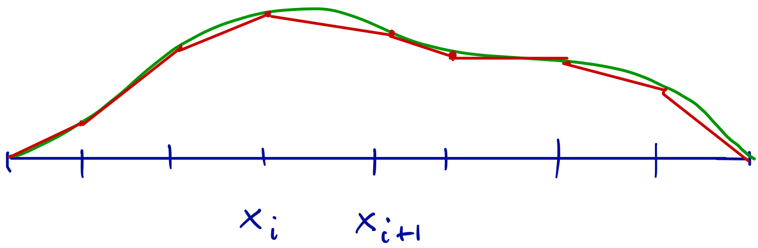
<u>Osservazione:</u> Se $\Pi u \in V_h$ è una opportuna approssimazione di u (ad esempio l'interpolata nodale) allora vale

$$\|u-u_h\|_{H^1} \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h} \|u-v_h\|_{H^1} \leq \frac{M}{\alpha} \|u-\Pi u\|_{H^1}$$

quindi possiamo studiare $\|u-\Pi u\|_{H^1}$ per ottenere ulteriori informazioni sull'errore $\|u-u_h\|_{H^1}$

stime sull'errore di interpolazione $\|u - \Pi u\|_{H^1}$

Chiamo per abbreviare $u_I = \Pi u$ l'interpolata di u



Errore di interpolazione su di un elemento

studio l'errore su un elemento $[x_i, x_{i+1}]$ arbitrario

Voglio dimostrare che:

$$\|(u - u_I)'\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \leq c\,(x_{i+1} - x_i)\, \|u''\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}$$

dove $(x_{i+1} - x_i)$ è la lunghezza dell'elemento e c è una costante indipendente dalla lunghezza dell'elemento e da u.

Facendo il quadrato, la disuguaglianza sopra diventa:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (e')^2 \leq C\,(x_{i+1} - x_i)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} (e'')^2$$

dove ho anche posto $e = u - u_I$, e

naturalmente $e'' = u''$ perché $u_I'' = 0$

inoltre $e(x_i) = e(x_{i+1}) = 0$, proprio per la condizione di interpolazione. Come prima cosa rivediamo la disuguaglianza di Poincaré, questa volta sull'intervallo (x_i, x_{i+1}):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} e^2 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^2 \cdot \left(x - \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)' = -\int_{x_i}^{x_{i+1}} (e^2)' \cdot (x - x_m)$$

$$+ \left[e^2 (x - x_m) \right]_{x = x_i}^{x = x_{i+1}} = -\int_{x_i}^{x_{i+1}} 2 e e' (x - x_m) \quad + 0$$

$$\leq 2 \cdot \max\{x - x_m\} \cdot \|e\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \|e'\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}$$

Quindi dividendo ambo i membri per $\|e\|_{L^2}$

$$\|e\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \leq (x_{i+1} - x_i) \cdot \|e'\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}$$

$\boxed{\text{Poincaré su } (x_i, x_{i+1})}$

Con un procedimento simile

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (e')^2 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} e' \cdot e' = -\int e \cdot e'' + \left[e e' \right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$= -\int_{x_i}^{x_{i+1}} e \cdot e'' \leq \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} e \cdot e'' \right| \leq \|e\|_{L^2} \|e''\|_{L^2}$$

Usando Poincaré su $(x_i; x_{i+1})$ e dividendo per $\|e'\|_{L^2}$ si ottiene la stima di errore di interpolazione sull'elemento (pag. precedente) con $c = 1$.

Sempre grazie alla disuguaglianza di Poincaré locale, abbiamo

$$\|e\|_{L^2(x_i,x_{i+1})} \le (x_{i+1}-x_i)\,\|e'\|_{L^2(x_i,x_{i+1})}$$

Stima dell'errore di interpolazione in L^2

$$\le (x_{i+1}-x_i)^2\,\|e''\|_{L^2(x_i,x_{i+1})}$$

Infine elevando al quadrato le precedenti, sommando su tutti gli elementi e poi prendendo la radice quadrata otteniamo

$$\|e\|_{L^2(0,1)} \le \sqrt{\sum_i (x_{i+1}-x_i)^4\,\|e''\|^2_{L^2(x_i,x_{i+1})}}$$

$$\|e'\|_{L^2(0,1)} \le \sqrt{\sum_i (x_{i+1}-x_i)^2\,\|e''\|^2_{L^2(x_i,x_{i+1})}}$$

o più semplicemente, ponendo $h = \max_i (x_{i+1}-x_i)$ e ricordando che $e = u - u_I$, otteniamo il seguente risultato.

Teorema (sull'errore di interpolazione lineare a tratti in dimensione 1). Sia $u \in H^2(0,1)$ (cioè $u'' \in L^2$) e u_I la sua interpolata lineare a tratti su una griglia di passo (mesh size) massimo h. Allora vale

$$\| u - u_I \|_{L^2(0,1)} \leq h^2 \| u'' \|_{L^2(0,1)}$$

$$\| (u - u_I)' \|_{L^2(0,1)} \leq h \| u'' \|_{L^2(0,1)}$$

Naturalmente segue, sommando

$$\| u - u_I \|_{H^1(0,1)} \leq h \| u'' \|_{L^2(0,1)}$$

Corollario: utilizzando la precedente e il lemma di Céa, si ottiene

$$\| u - u_h \|_{H^1(0,1)} \leq c\, h \| u'' \|_{L^2(0,1)}$$

dove u_h è la soluzione del metodo agli elementi finiti e c dipende dal problema ma è indipendente da h e da u.

Si potrebbe anche dimostrare che

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^2 \|u''\|_{L^2}$$

In conclusione, per il nostro problema modello l'errore del metodo elementi finiti si comporta come l'errore di interpolazione ed in particolare va come Ch in norma H^1 oppure come Ch^2 in norma L^2.