ANALISI MATEMATICA 2 Prova scritta 02/07/2012	COGNOME e Nome firma

1. **[15 pt]** Data la funzione $f : \mathrm{dom}\, f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x, y) = \frac{1}{4}\big(\log(x^2 + 3y^2)\big)^2$

- [1 pt] calcolare ∇f:

- [2 pt] Disegnare l'insieme dei punti stazionari di f

- [2 pt] Determinare $\inf f$ e $\sup f$

- [3 pt] Sia $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, determinare i punti di massimo di f su C.

- [7 pt] Siano $\mathbf{F} = \nabla f$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, n il versore normale uscente da ∂D e τ il versore tangente a ∂D, orientato in senso antiorario. Calcolare

$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot n$:

$\int_{\partial D^+} \mathbf{F} \cdot \tau$:

2. [4 pt] Determinare l'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(7n)^x x^{7n}$.

3. [4 pt] Determinare, all'interno dell'insieme dei parallelepipedi di volume $8\,cm^3$, quello (*se* esiste) di superficie minima e quello (*se* esiste) di superficie massima, specificando i passaggi salienti (e.g., impostazione analitica, metodo risolutivo, risultato).

4. [4 pt] Sia dato $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ definito da $\Sigma = \left\{x^2+y^2+z^2=2\right\} \cap \left\{z \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. Sia

$$f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Calcolare l'integrale superficiale $\displaystyle\int_\Sigma f$

5. [3 pt] Domanda di teoria: Enunciare il criterio del confronto per serie numeriche.

1. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x,y) = \frac{1}{4}\big(\log(x^2+2y^2)\big)^2$

   - $\nabla f(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\log(x^2+2y^2)}{x^2+2y^2}\,(2x,4y) = \frac{\log(x^2+2y^2)}{x^2+2y^2}\,(x,2y)$
   - Punti stazionari: ellisse di equazione $x^2+2y^2 = 1$ (notare che l'origine $(0,0)$ non appartiene al dominio della funzione)
   - $\inf = 0$, $\sup = +\infty$
   - Parametrizzando l'insieme C come $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, si trova

     $$f(\gamma(t)) = \frac{1}{4}\big(\log(\cos^2 t + 2\sin^2 t)\big)^2 = \frac{1}{4}\big(\log(1+\sin^2 t)\big)^2.$$

     Si può notare direttamente che, essendo il logaritmo monotono crescente, il minimo si avrà quando $\sin^2 t = 0$ e il massimo per $\sin^2 t = 1$. Oppure, si calcola

     $$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = \frac{1}{2}\big(\log(1+\sin^2 t)\big)2\sin t\cos t = 0.$$

     In ogni caso, in $t = 0$ e $t = \pi$ si hanno punti di minimo, corrispondenti nel piano a $m_1 = (1,0)$, $m_2 = (-1,0)$, mentre in $t = \pi/2$ e $t = 3\pi/2$ si hanno punti di massimo, corrispondenti a $M_1 = (0,1)$ e $M_2 = (0,-1)$.
   - Flusso. Notiamo che $\partial D = \partial B_1 \cup \partial B_2$. Per $r = 1,2$ parametrizziamo ∂B_r come $\gamma_r(t) = r(\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, e per semplicità di notazione, poniamo $\phi(t) = \cos^2(t) + 2\sin^2(t)$. Calcoliamo anche i vettori tangente e normale alle curve γ_r

     $$\gamma_r'(t) = r(-\sin(t), \cos(t)), \qquad n_r(t) = r(\cos(t), \sin(t)).$$

     Si ha quindi

     $$\begin{aligned}
     \int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot n &= \int_{\partial B_2} \nabla f \cdot n_2 - \int_{\partial B_1} \nabla f \cdot n_1 \\
     &= \int_0^{2\pi} \frac{\log(4\phi(t))}{4\phi(t)}(2\cos(t), 4\sin(t)) \cdot n_2(t)\,dt \\
     &\qquad - \int_0^{2\pi} \frac{\log(\phi(t))}{\phi(t)}(\cos(t), 2\sin(t)) \cdot n_1(t)\,dt \\
     &= \int_0^{2\pi} \frac{\log(4\phi(t))}{4\phi(t)}4\phi(t)\,dt - \int_0^{2\pi} \frac{\log\phi(t)}{\phi(t)}\phi(t)\,dt \\
     &= \int_0^{2\pi} \log(4\phi(t)) - \log\phi(t)\,dt \\
     &= \int_0^{2\pi} \log 4 + \log\phi(t) - \log\phi(t)\,dt \\
     &= \int_0^{2\pi} \log 4 = 2\pi\log 4.
     \end{aligned}$$
   - Lavoro: (teorema di Green)

     $$\int_{\partial D^+} \mathbf{F}\cdot\tau = \int_D \operatorname{rot}\mathbf{F} = \int_D \operatorname{rot}\nabla f = 0.$$

2. Sia data $\sum_{n=1}^{+\infty}(7n)^x x^{7n}$. Poniamo $y = x^7$. Usando il criterio della radice, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(7n)^x} = 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}$, il raggio della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(7n)^x y^n$ è 1, e si ha convergenza se

$$-1 < y < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x^7 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < x < 1.$$

Volendo ora controllare il comportamento negli estremi dell'intervallo, si vede velocemente che se $x = 1$ la serie $\sum(7n)$ diverge, mentre se $x = -1$, la serie $\sum(-1)^n(7n)^{-1}$ converge, grazie al criterio di Leibniz. Concludiamo che l'insieme di convergenza è $[-1, 1)$.

3. Si tratta di minimizzare, o massimizzare, la funzione $f(x, y, z) = 2(xy+xz+yz)$, vincolata all'insieme $\{x, y, z > 0,\ xyz = V\} \subset \mathbb{R}^3$. L'insieme di vincolo non è un compatto di $\mathbb{R}^3$, quindi non è detto che la funzione abbia massimo e minimo. In particolare, non ha massimo. Questo si può vedere scegliendo $x = y$, $z = V/x^2$ e facendo il limite per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x, x, V/x^2) = \lim_{x\to\infty}\left(2x^2 + 2\frac{V}{x}\right) = +\infty.$$

Il minimo si può calcolare in diversi modi. Per esempio, con i moltiplicatori di Lagrange, si risolve il sistema

$$\begin{cases} 2(y+z) &= \lambda yz \\ 2(x+z) &= \lambda xz \\ 2(x+y) &= \lambda xy \\ xyz &= V. \end{cases}$$

L'unica soluzione è $x = y = z = \sqrt[3]{V}$, a cui è associata una superficie di $6V^{2/3}$.

4. Usando le coordinate sferiche standard, con raggio *fissato* $R = \sqrt{2}$, la superficie Σ si può descrivere come

$$\sigma(\varphi, \theta) = \big(R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi\big), \qquad \|\nu(\varphi, \theta)\| = R^2\sin\varphi,$$

con $\varphi \in [0, 2\pi/3]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Il secondo estremo di integrazione per φ si ricava dalla relazione

$$z \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad R\cos\varphi \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\varphi \leq -\frac{1}{2}.$$

Calcoliamo quindi

$$
\begin{aligned}
\int_\Sigma f &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{2}{3}\pi} f(\sigma(\varphi,\theta))\|\nu(\varphi,\theta)\|\,d\varphi\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{(R\sin\varphi\cos\theta)^2+(R\sin\varphi\sin\theta)^2}{R^2} R^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{2}{3}\pi} R^2(\sin\varphi)^2\ \sin\varphi\,d\varphi\,d\theta \\
&= 2\pi R^2\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(1-(\cos\varphi)^2)\sin\varphi\,d\varphi \\
&= 2\pi R^2\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sin\varphi-\sin\varphi(\cos\varphi)^2\,d\varphi \\
&= 2\pi R^2\Big[-\cos\varphi+\frac{(\cos\varphi)^3}{3}\Big]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{2}{3}\pi} \\
&= 2\pi R^2\left(-\cos\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{3}(\cos\frac{2}{3}\pi)^3-\frac{2}{3}\right).
\end{aligned}
$$