ANALISI MATEMATICA 2 Prova scritta 12/06/2012	COGNOME e Nome firma

1. Data $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{\pi^n}(3|x-1|)^n$. Pongo $y = |x-1|$ e studio

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n, \qquad \text{con} \qquad a_n = (n+1)\left(\frac{3}{\pi}\right)^n.$$

Usando, per esempio, il criterio della radice, si vede che l'insieme di convergenza è

$$|y| < \frac{\pi}{3}, \quad \text{cioè} \quad |x-1| < \frac{\pi}{3}, \quad \text{e quindi}$$

$$1 - \frac{\pi}{3} < x < 1 + \frac{\pi}{3}.$$

Per trovare la somma pongo $z = \frac{3|x-1|}{\pi}$, e studio

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dz} z^{n+1} = \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+1} = \frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{+\infty} z^n = \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{1-z} - 1\right\} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

in $x = 0$ la somma vale

$$s(0) = \frac{1}{(1-\frac{3}{\pi})^2} = \frac{\pi^2}{(\pi-3)^2}.$$

2. $f = \cos(xy)$. P minimo assoluto (non stretto)

$$\nabla f = (-y\sin(xy), -x\sin(xy)).$$

L'insieme dei punti stazionari è dato dagli assi cartesiani, uniti alle iperboli di equazione $xy = \pm k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ovvero l'insieme S :

$$S = \{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \left\{y = \frac{\pi}{x}\right\} \cup \left\{y = -\frac{\pi}{x}\right\} \cup \left\{y = \frac{2\pi}{x}\right\} \cup \left\{y = -\frac{2\pi}{x}\right\} \cup \{\dots\}$$

$$Hf = \begin{pmatrix} -y^2\cos(xy) & -\sin(xy) - xy\cos(xy) \\ \circ & -x^2\cos(xy) \end{pmatrix}$$

3. Sia ℓ la somma delle misure, il problema equivale a massimizzare la funzione $f = xyz$ nel sottoinsieme

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x, y, z \quad \text{e} \quad x + y + z \le \ell\}.$$

Dato che la funzione è C^1 e l'unico punto singolare è l'origine, che chiaramente non è un massimo, si tratta di cercare un massimo su $\partial\Omega$. L'unico lato dove f non è zero è l'insieme

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x, y, z \quad \text{e} \quad x + y + z = \ell\}.$$

Usiamo quindi il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Sia $g = x+y+z-\ell$, dobbiamo risolvere il sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$ con $g = 0$, cioè

$$\begin{cases} yz = \lambda, \\ xz = \lambda, \\ xy = \lambda, \\ x + y + z = \ell. \end{cases}$$

Un rapido conto rivela l'unica soluzione (con variabili positive) $x = y = z = \dfrac{\ell}{3}$.

4. $\gamma(t) = (\cos(t + \pi/2), \sin(t + \pi/2), t), \quad t \in \mathbb{R}$,

$$\gamma'(t) = (-\sin(t + \pi/2), \cos(t + \pi/2), 1), \qquad \gamma(\pi) = (0, -1, \pi), \quad \gamma'(\pi) = (1, 0, 1)$$

$$r(t) = (t - t_0)\gamma'(\pi) + \gamma(\pi), \qquad \text{per un qualunque } t_0 \in \mathbb{R}.$$

Potenziale:

$$\varphi = x + y^2 e^{xy} + \cos(y) + \frac{1}{2}z^2.$$

Lavoro (uguale in tutti i casi):

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \tau = \varphi(\gamma(4\pi)) - \varphi(\gamma(0)) = 8\pi^2.$$

5. Sia $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\} \cap \{x \geq 0\}$.

$$\begin{aligned} I &= \int_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \int_{x^2+y^2}^{2+\sqrt{x^2+y^2}} 1 \, dz \, dx \, dy \\ &= \int_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Big(2 + \sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)\Big) dx \, dy \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta \int_0^2 (2 + \rho - \rho^2)\rho \, d\rho \\ &= 2\Big[\rho^2 + \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4}\Big]_0^2 = 2(4 + \frac{8}{3} - 4) = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Per il calcolo del flusso uso

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \log x + 1 - \log x = 1,$$

e sfrutto tutti i calcoli appena fatti:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} F \cdot N = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} = \int_V 1 = \int_D \int_{x^2+y^2}^{2+\sqrt{x^2+y^2}} 1 \, dz \, dx \, dy \\ = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^2 (2 + \rho - \rho^2)\rho \, d\rho \\ = \pi \frac{8}{3}. \end{aligned}$$