ANALISI MATEMATICA 2 04/09/2018	Cognome e Nome

PARTE A

1. [6 pt] Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)\frac{(1-x)^n}{7^{n+1}}$, determinarne

   (a) il raggio (b) l'insieme di convergenza.

2. [6 pt] Sia $f(x,y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. (a) Calcolare $\nabla f(x,y)$

   (b) Indicare i punti stazionari di f (c) Classificarli

3. [4 pt] Calcolare il lavoro L del campo

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{y^2+1}, -\frac{1}{x}\right) \qquad L =$$

   lungo la curva $\gamma(t) = (t^2+1, t)$, $t \in [4,6]$.

4. [6 pt] Sia dato $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 25,\ y \geq \sqrt{3}x\}$. (a) Scrivere E in coordinate polari (b) Calcolare $\displaystyle\iint_E e^{x^2+y^2}\,dx\,dy =$

5. [6 pt] Dati il campo $F(x,y,z) = (x^3+z, yx^2, \sqrt{x^2+y^2})$ e la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 7 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\right\},$$

   calcolare il flusso di F attraverso Σ, orientata verso l'alto, riportando i passaggi salienti.

6. [6 pt] Calcolare massimo e minimo assoluti di $f(x,y) = y$, vincolati all'ellisse definita da

   $g(x,y) = 5(x^2+y^2) + 8xy - 9 = 0$.

PARTE B

7. [6 pt] Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Fornire le definizioni delle seguenti proprietà:

   (a) f è derivabile in $(0,0)$

   (b) f è differenziabile in $(0,0)$

8. [8 pt] Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha e^{x+y}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   è continua in $(0,0)$?

   è derivabile in $(0,0)$?

9. [9 pt] Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$. Indicare

   (a) La parte interna di A

   (b) La frontiera di A

   (c) La chiusura di A

10. [7 pt] Sia data la superficie di rotazione $g : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$g(t,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\pi t)\cos(\theta) \\ \cos(\pi t)\sin(\theta) \\ \sin(\pi t) \end{pmatrix} \quad \text{e il punto } P = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

   (a) Calcolare $g(1/4, \pi)$

   (b) Calcolare un vettore normale a g nel punto P

   (c) Calcolare il piano tangente a g nel punto P

11. [4 pt] Siano date $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$. Quale delle seguenti espressioni corrisponde al prodotto $(\mathbf{D}\mathbf{e_1}) \cdot \mathbf{e_2}$, dove $\mathbf{D}$ è la matrice Jacobiana[1] di $\gamma \circ f$, e $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$?

   $\boxed{\text{A}}$ $\gamma_1'(f)\partial_x f$ $\boxed{\text{B}}$ $\gamma_1'(f)\partial_y f$ $\boxed{\text{C}}$ $\gamma_2'(f)\partial_x f$

   $\boxed{\text{D}}$ $\gamma_2'(f)\partial_y f$ $\boxed{\text{E}}$ $\gamma_1'(f)\partial_x f + \gamma_2'(f)\partial_y f$.

[1]Nota: In alcuni testi la matrice Jacobiana viene indicata con $\mathbf{J}$, anziché con $\mathbf{D}$.