| ANALISI MATEMATICA 2 | Cognome e Nome | Elettr./Inform. | Bioing. |
|---|---|---|---|
| 11/02/2020 | | ☐ | ☐ |

## PARTE A

1. [5 pt] Data la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}(x+1)^n\frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$, determinarne: (a) il raggio di convergenza ☐ (b) l'insieme di convergenza ☐

2. [6 pt] Determinare e classificare i punti stazionari della funzione

$$E(x,y) = -3x^2 + 3xy - y^2 + x + 2y.$$ ☐

3. [6 pt] Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (z\cosh(x), -2y/\pi, -\frac{z^2}{2}\sinh(x))$ uscente dalla superficie dell'insieme $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 3, x^2+y^2 \le 4\}$ ☐

4. [5 pt] Determinare l'equazione della retta tangente in (0,5) al grafico della funzione $y = g(x)$ definita implicitamente dall'equazione $f(x,y) = 0$, dove

$$f(x,y) = e^{x^2y} + 26\sin(x) + \arctan(y) - 1 - \arctan(5).$$ ☐

5. [6 pt] Sia dato il campo $F(x,y,z) = \big(y(3x^2-6xz), x^2(x-3z), 2z-3x^2y\big)$. Determinarne tutti i potenziali $U(x,y,z) =$ ☐

6. [6 pt] Sia fissato un parametro $r \in (0,1)$ e sia data la funzione

$$\varphi(x,y,t) := \begin{cases} xt & \text{se } t \in [0,r], \\ yt + r(x-y) & \text{se } t \in (r,1]. \end{cases}$$

Per determinare il minimo di

$$f(x,y) = \int_0^1 |\partial_t\varphi(x,y,t)|^2\,\mathrm{d}t \qquad \text{nell'insieme} \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x,y,1) = 1\},$$

(a) scrivere esplicitamente la funzione da minimizzare $f(x,y) =$ ☐

(b) scrivere esplicitamente il vincolo $0 = g(x,y) =$ ☐

(c) infine, indicare il valore minimo di $f$: ☐

## PARTE B

7. [6 pt] Enunciare il Teorema di Stokes (o: "Teorema del rotore")

8. [6 pt] Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 + \dfrac{\cos(y)|x|^\alpha}{(x^2+y^2)^5} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in $(0,0)$?

è derivabile in $(0,0)$?

9. [5 pt] Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$ con $g(0) = g'(0) = 1$. Allora $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(2t, g(t))$ in $t = 0$ vale: A $\nabla f(0,0) \cdot (2,1)$; B $\nabla f(0,1)$; C $2f'(0) + f(0)$; D $(2,1) \cdot \nabla f(0,1)$; E $(0,1) \cdot \nabla f(0,1)$; F $\partial_x f(0,1) + \partial_y f(0,1)$.

10. [5 pt] Sia $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ e siano $f_n : I \to \mathbb{R}$ continue per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora:

(a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge totalmente su $I$ se $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\max_{x\in I}\{f_n(x)\}| < \infty$ VERO FALSO

(b) $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge totalmente su $I$ se $\sum_{n\in\mathbb{N}} \max_{x\in I}\{|f_n(x)|\} < \infty$ VERO FALSO

(c) $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge totalmente su $I$ se esiste una successione $\{a_n\}$ tale che $|f_n(x)| \leq a_n$ per ogni $x \in I$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e vale $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty$ VERO FALSO

(d) se $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge totalmente su $I$ allora la somma è una funzione continua in ogni punto di $I$ VERO FALSO

(e) se $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge puntualmente su $I$ allora converge totalmente su ogni intervallo chiuso contenuto in $(0,1)$ VERO FALSO

11. [6 pt] Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > e^{2x}\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, allora $A \cup B$ è A aperto; B chiuso; C né aperto, né chiuso; D convesso; E limitato.

12. [6 pt] Sia dato il campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$F(x,y) = \left( \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2} \right).$$

Calcolare il lavoro di $F$ lungo:

(a) la curva $r(t) := (1 + 2\cos(t), 1 - 2\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$;

(b) la frontiera del quadrato $[1,2] \times [1,2]$, orientata in senso antiorario.

(c) la curva $\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 4\pi]$;