ANALISI MATEMATICA 2 24/07/2019	Cognome e Nome

PARTE A

1. [4 pt] Data la serie di potenze $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{4^n} \cdot \frac{2}{n}$, determinarne

   (a) l'insieme di convergenza

   (b) la somma $f(x)$

2. [6 pt] Sia $f(x,y) = (x^3 - x)e^{y^2-1}$.

   (a) Calcolare $\nabla f(1,1)$

   (b) Indicare i punti stazionari di f

   (c) Classificarli

3. [5 pt] Sia dato il campo $F(x,y) = \left(\frac{6xy}{(1+x^2)^2}, -\sin y - \frac{3}{1+x^2} \right)$ e sia γ la curva parametrizzata da $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t\sin(t), t\cos(t))$.
   Calcolare il lavoro $\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\gamma =$

4. [5 pt] Dati la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, 4 - z = x^2 + y^2\}$ e il campo $F(x,y,z) = (2x, x^2\cos(z), z+1)$, calcolare il modulo del flusso $\left| \iint_\Sigma F \cdot n \, \mathrm{dS} \right| =$

5. [4 pt] Calcolare l'equazione del piano tangente alla superficie cartesiana Σ parametrizzata da $(s,t) \mapsto (s, t, s^2\cos(t))$ nel punto $P = (1, \pi, -1)$

6. [5 pt] Calcolare i valori del massimo e del minimo assoluti di $f(x,y) = x^4y^4$ vincolati all'insieme $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\}$

7. [5 pt] Calcolare l'area della superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, 2 < x^2 + y^2 \leq 5\}$
   $|\Sigma| =$

PARTE B

8. [7 pt] Enunciare il teorema di Stokes (detto anche: Teorema del rotore)

9. [5 pt] Per quale $a \in \mathbb{R}$ vale $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$? [Può essere utile ricordare che $(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx)^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$]

10. [6 pt] Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dire quali delle seguenti implicazioni sono vere.
    (a) Se f è derivabile, allora f è continua VERO FALSO
    (b) Se f è differenziabile, allora f è derivabile VERO FALSO
    (c) Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue, allora f è differenziabile VERO FALSO
    (d) Se tutte le derivate direzionali sono continue allora f è differenziabile VERO FALSO
    (e) Se f è differenziabile allora $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ esistono e sono continue VERO FALSO
    (f) Se $\lim_{n\to\infty} f(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) = f(\underline{0})$ per ogni (x, y) allora f è continua in $(\underline{0})$ VERO FALSO

11. [6 pt] Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq \frac{1}{x}\}$. Determinare
    $\mathrm{int}(A) =$
    $\overline{A} =$
    $\partial A =$

12. [4 pt] Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$ con $g(0) = 0$. Allora $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} f(2t + 1, g(t))$ calcolata in $t = 0$ vale: A $\nabla f(1, 0) \cdot g'(0)$; B $\partial_y f(1, 0)g'(0)$; C $(2, g'(0)) \cdot \nabla f(1, 0)$; D $2f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$; E $\partial_x f(1, 0)+g'(0)\partial_y f(1, 0)$; F $(\partial_x f(1, 0)+\partial_y f(1, 0))g'(0)$.

13. [6 pt] Sia dato il campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ definito da $F(x, y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$
    (a) Il dominio di F è semplicemente connesso VERO FALSO
    (b) F è irrotazionale VERO FALSO
    (c) F è conservativo VERO FALSO
    (d) $\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\gamma = 0$ per ogni curva γ chiusa di classe C^1 con supporto contenuto in $\{x > 0\}$ VERO FALSO
    (e) Il valore di $\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\gamma$ è uguale per ogni curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ aperta, di classe C^1 con $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ due punti fissati contenuti nel primo quadrante VERO FALSO
    (f) Data $\gamma(t) = (50 \cos t, -50 \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, allora $\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\gamma = 2\pi$ VERO FALSO