ANALISI MATEMATICA 2 27/06/2019	Cognome e Nome

PARTE A

1. [4 pt] Data la serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x-5)^{2n}}{7} \cdot \frac{(-2)^n}{(2n)!}$, determinarne

   (a) l'insieme di convergenza $\boxed{}$ (b) la somma $f(x)$ $\boxed{}$

2. [6 pt] Sia $f(x,y) = (x^2+y^2)(x^2+y^2-4)$. (a) Calcolare $\nabla f(1,2)$ $\boxed{}$

   (b) Indicare i punti stazionari di f $\boxed{}$ (c) Classificarli $\boxed{}$

3. [4 pt] Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [0, 5\pi] \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = (2t, -2\sin t, \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2})$

   $\ell(\gamma) = \boxed{}$ [*si ricorda*: $1 + \cos 2t = 2\cos^2 t$.]

4. [5 pt] Dati il campo $F(x,y,z) = (e^y \cos x, (1+e^y)\sin x, 4xy)$ e la superficie cartesiana $\Sigma = \{z = (1+e^y)\cos x,\ 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 3\}$, calcolare $\left| \iint_\Sigma F \cdot n \, \mathrm{dS} \right| = \boxed{}$

   [*suggerimento*: calcolare direttamente il flusso, non utilizzare il teorema della divergenza.]

5. [5 pt] Sia data la funzione $F(x,y) = e^{x^2+y} + 2\sin x + y^3 - 1$. Indicando con g la funzione definita implicitamente dall'equazione $F(x, g(x)) = 0$ in un intorno di $(0,0)$ e con $T_1(x)$ il polinomio di Maclaurin del primo ordine di g, calcolare $T_1(0) = \boxed{}$

6. [5 pt] Calcolare i <u>valori</u> (non i punti) di massimo e di minimo assoluti di $f(x,y) = 2 + xy$ vincolati all'insieme $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 12x^2 + 14y^2 = 48\}$ $\boxed{}$

7. [5 pt] Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2,\ \ x^2+y^2 \le 2-z\}$. Calcolare

   $\iiint_\Omega e^{z^2-4z} \, dx\, dy\, dz = \boxed{}$

PARTE B

8. [5 pt] Data $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), xz, F_3(x, y, z))$, scrivere le espressioni

   (a) $\operatorname{div} F =$ ☐ (b) $\operatorname{rot} F =$ ☐

   (c) fornire l'esempio di **un** campo $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che: $\operatorname{div} G = 0$, e $\operatorname{rot} G$ non è il campo costante $\equiv (0, 0, 0)$. $G =$ ☐

9. [8 pt] Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2}(x^4 y)}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   è continua in $(0, 0)$? ☐

   è differenziabile in $(0, 0)$? ☐

10. [5 pt] Sia $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ e siano $f_n : I \to \mathbb{R}$ continue per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora:

    (a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge totalmente su I se $\sum_{n\in\mathbb{N}} \max_{x\in I}\{|f_n(x)|\} < \infty$ VERO FALSO

    (b) $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge totalmente su I se $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\max_{x\in I}\{f_n(x)\}| < \infty$ VERO FALSO

    (c) $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge totalmente su I se esiste una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $|f_n(x)| \leq a_n$ per ogni $x \in I$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e vale $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty$ VERO FALSO

    (d) se $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge puntualmente su I allora converge totalmente su ogni intervallo chiuso contenuto in $(0, 1)$ VERO FALSO

    (e) se $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge totalmente su I allora la somma è una funzione continua in ogni punto di I VERO FALSO

11. [4 pt] Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
    A $\Omega = \Omega^\circ$; B $\Omega = \overline{\Omega}$; C $\Omega = \partial\Omega$; D $\partial\Omega = \emptyset$; E $\Omega = \emptyset$;
    F $\Omega^\circ = \emptyset$; G $\overline{\Omega} = \emptyset$; H $\partial\Omega \subseteq \Omega^\circ$ I $\Omega^\circ \subseteq \partial\Omega$.

12. [6 pt] Dato $V = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, sia $I \subseteq \mathbb{R}$ il più grande intervallo tale che

$$\iiint_V \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{a}{2}}}\, dx\, dy\, dz < +\infty \quad \forall\, a \in I. \text{ Allora}$$

    A $I = \mathbb{R}$; B $I = [3, +\infty)$; C $I = (-\infty, 3)$; D $I = (3, +\infty)$; E $I = (-\infty, 3]$.

13. [6 pt] Sia dato il campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$F(x, y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right). \qquad \text{Calcolare il lavoro di } F \text{ lungo:}$$

    (a) la curva $r(t) := (3 + \cos^5(t), 3 + \sin^5(t))$, $t \in [0, 2\pi]$; ☐

    (b) la frontiera del quadrato $[-2, 2] \times [-2, 2]$, orientata in senso antiorario. ☐

    (c) la curva $\gamma(t) := (\cos(t), -\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$; ☐