Tutorato del 25.03.2019

1 Funzioni a valori vettoriali

1.1 Velocità, versore tangente

Per le seguenti curve

(a) Disegnare il sostegno;

(b) Calcolare $\gamma'(t)$, $|\gamma'(t)|$, $\tau(t)$;

(c) Rappresentare i vettori $\gamma'(t_j)$, applicati in $\gamma(t_j)$, per i valori assegnati di t_j.

Esercizio 1

$$\gamma(t) = (t\cos(t), t\sin(t)), \qquad t \in [0, 6\pi],$$

$t_1 = 0$, $t_2 = \pi/2$, $t_3 = 3\pi/2$, $t_4 = 2\pi$.

□

Esercizio 2

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t), \qquad t \in [0, 4\pi],$$

$t_1 = 0$, $t_2 = \pi/2$, $t_3 = 2\pi$, $t_4 = 5\pi/2$.

□

1.2 Lunghezza, ascissa curvilinea

Per le seguenti curve

(a) Calcolare la lunghezza $\ell(\gamma)$;

(b) Parametrizzare γ attraverso l'ascissa curvilinea.

Esercizio 3

$$\gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t), ht), \qquad t \in [0, 4\pi],$$

dove $R, h > 0$.

□

Esercizio 4

$$\gamma(t) = \left(t^3/3, t^2/2\right), \qquad t \in [0, 2].$$

□

Esercizio 5
Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = \left(2t+1, 1-t^2, \frac{1}{3}t^3\right).$$

□

1.3 Integrali di linea

Esercizio 6
Siano date $\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^3$ e $f : \mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con

$$\gamma(t) = (4\cos t, 4\sin t, 3t^2/4) \qquad \text{e} \qquad f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+3z}.$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma f\, ds$.

□

Esercizio 7
Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse z di un filo con densità costante f, parametrizzato dalla curva.

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, t) \qquad t \in [0, 4\pi].$$

Esprimere il risultato in funzione della massa m e del raggio R.

□

1.4 Curve in forma polare

Esercizio 8
Una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ si dice *in forma polare* se ha la forma

$$\gamma(\theta) = \rho(\theta)\mathbf{v}(\theta), \quad \text{dove}$$

ρ è una funzione scalare assegnata (di variabile θ) e $\mathbf{v}$ è il versore $\mathbf{v}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

(a) Verificare che

$$\gamma' = \rho'\mathbf{v} + \rho\mathbf{v}^\perp,$$

dove $\mathbf{v}^\perp(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$.

(b) Verificare che

$$\gamma' \cdot \gamma = \rho'\rho.$$

(c) Calcolare la lunghezza della curva di equazione polare

$$\rho(\theta) = e^{-\theta}, \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

□