Tutorato del 29.04.2019

6 Funzioni a valori vettoriali

Esercizio 1
Siano date

$$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = (2x, x - y), \quad g(u, v) = (v, 3v - 2u).$$

(a) Calcolare la funzione composta $h = g \circ f$ e quindi la matrice Jacobiana $Dh(x, y)$.
(b) Calcolare la matrice Jacobiana della funzione composta attraverso la formula

$$D(g \circ f) = Dg(f(x, y))Df(x, y).$$

□

Esercizio 2
Siano date le matrici

$$W^{(1)} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \qquad W^{(2)} \in \mathbb{R}^{d\times m},$$

la funzione di attivazione

$$F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \quad F(z_1, \ldots, z_m) = (\mathrm{Tanh}(z_1), \ldots, \mathrm{Tanh}(z_m)),$$

dove $\mathrm{Tanh}(z) = \frac{\mathrm{Sinh}(z)}{\mathrm{Cosh}(z)}$, e sia $\mathbf{y}$ l'output della rete neurale a due strati

$$\mathbf{y} = W^{(2)}F(W^{(1)}\mathbf{x}).$$

Dati $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$, indicando con w^1_{ij} e w^2_{ki} le componenti delle matrici $W^{(1)}$ e $W^{(2)}$, calcolare

$$\frac{\partial E}{\partial w^2_{ki}}, \qquad \frac{\partial E}{\partial w^1_{ij}},$$

dove E indica la funzione di errore

$$E = \frac{1}{2}|\mathbf{y} - \mathbf{t}|^2.$$

□

7 Superfici parametriche

Esercizio 3
Dato $A = [0,1] \times [0,4\pi]$, sia definita la superficie

$$\sigma(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), v), \qquad (u,v) \in A.$$

(a) Disegnare alcune linee coordinate di σ. (Per esempio, $u = 0, u = 1/2, u = 1$ e $v = 0, v = \pi/2, v = 2\pi$.)

(b) Disegnare $\sigma(A) \in \mathbb{R}^3$.

(c) Calcolare la matrice Jacobiana $D\sigma$.

(d) Determinare eventuali punti singolari della superficie.

(e) Calcolare il vettore normale $\nu(u,v)$ e il versore normale $n(u,v)$.

$\square$