FACOLTÀ DI INGEGNERIA. ESAME DI ANALISI MATEMATICA II.
Corsi di Laurea in Bioingegneria, Ingegneria Elettronica, Ingegneria Informatica.
A.A. 2011/2012. Docente: M. Veneroni

PROGRAMMA PER LA PROVA ORALE COMPLETA

Premessa. Oltre al programma indicato dettagliatamente nel seguito, per il superamento dell'esame è ritenuta irrinunciabile la conoscenza dei necessari prerequisiti, in particolare dei contenuti dei corsi di Analisi Matematica 1 e di Geometria e Algebra richiamati espressamente dal programma di Analisi Matematica 2.

Per comodità degli studenti, nel seguito si riporta il riferimento al libro di testo consigliato (C. CANUTO – A. TABACCO, Analisi Matematica II, Springer, Milano, 2008).

1. **Serie numeriche (Capitolo 1, § 1.1 – 1.5).** Definizioni di serie (numerica); somme parziali o ridotte di una serie; termine generale di una serie; serie convergente, divergente, indeterminata; somma della serie; resto n-esimo; serie geometrica; serie armonica; serie armonica generalizzata; serie a termini positivi; serie a termini di segno alterno; serie convergente assolutamente.

   Enunciati di

   - Condizione necessaria di convergenza (Proprietà 1.6) con dimostrazione
   - Proprietà delle serie a termini positivi (Proposizione 1.9) con dimostrazione
   - Criterio del confronto (Teorema 1.10) con dimostrazione
   - Criterio del confronto asintotico (Teorema 1.12) con dimostrazione
   - Criterio del rapporto (Teorema 1.14)
   - Criterio della radice (Teorema 1.15)
   - Criterio integrale (Teorema 1.17) con dimostrazione
   - Stime integrali del resto e della somma (Proprietà 1.18) con dimostrazione
   - Criterio di Leibniz (Teorema 1.20) con dimostrazione
   - Criterio di convergenza assoluta (Teorema 1.24).

2. **Serie di funzioni e di potenze (Capitolo 2, § 2.1 – 2.5).** Definizioni di convergenza puntuale, insieme di convergenza puntuale, funzione limite; convergenza uniforme; convergenza puntuale, assoluta e uniforme di una serie di funzioni; serie di potenze; raggio di convergenza; prodotto alla Cauchy tra due serie di potenze; serie derivata e serie integrata. Serie di Taylor; serie di MacLaurin; funzione analitica (o sviluppabile in serie di Taylor); polinomio di Taylor; polinomio di MacLaurin.

Enunciati di

- Relazione fra convergenza uniforme e puntuale (Proposizione 2.4)
- Passaggio al limite della continuità (Teorema 2.7)
- Struttura dell'insieme di convergenza (Proposizione 2.24, Corollario 2.26, Teorema 2.27)
- Criterio del rapporto (Teorema 2.32)
- Criterio della radice (Teorema 2.33)
- Operazioni algebriche sulle serie di potenze (Teoremi 2.35 e 2.37)
- Derivazione e integrazione di serie di potenze (Teorema 2.39)
- Espressione dei coefficienti di una serie di potenze in funzione della somma (Proposizione 2.41) con dimostrazione
- Formula di Taylor con resto in forma di Peano (Teorema 7.1 del I Vol. di C. Canuto – A. Tabacco)
- Formula di Taylor con resto in forma di Lagrange (Teorema 7.2 del I Vol. di C. Canuto – A. Tabacco)
- Migliore approssimazione del polinomio di Taylor (Proposizione 7.5 del I Vol. di C. Canuto – A. Tabacco)
- Condizione sufficiente per la sviluppabilità in serie di Taylor (Teorema 2.44) con dimostrazione
- Sviluppo in serie di Maclaurin di e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $(1+x)^\alpha$, $\log(x+1)$, $\arctan(x)$, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$, con dimostrazione.

3. **Funzioni tra spazi euclidei (Capitolo 4, § 4.1, 4.3 – 4.5).** Definizioni di intorno di un punto in $\mathbb{R}^n$; intorno di ∞; punto interno, esterno, di frontiera, di accumulazione, isolato; insieme aperto, chiuso, limitato, compatto, convesso, connesso; regione; funzione scalare (o reale) di n variabili reali, funzione vettoriale di n variabili reali, insieme di livello; funzione continua in un punto x_0; limiti di funzioni di n variabili.

   Enunciati di

   - Continuità di una funzione vettoriale (Proposizione 4.20)
   - Continuità della funzione composta (Proposizione 4.22)
   - Condizione sufficiente per l'esistenza di un limite (Proposizione 4.27).

4. **Calcolo differenziale per funzioni scalari (Capitolo 5, § 5.1 – 5.6).**

   Definizioni di: derivate parziali prime; gradiente; derivata direzionale; differenziabilità in un punto; differenziale; formula di linearizzazione; iperpiano tangente; funzione lipschitziana; derivate parziali di ordine superiore; matrice hessiana;

polinomi di Taylor del primo e del secondo ordine; punto di massimo (minimo) relativo; punto di massimo (minimo) assoluto; punto di massimo (minimo) stretto; punto di estremo; punto stazionario; forma quadratica definita positiva, negativa; forma quadratica semidefinita positiva, negativa; forma quadratica non definita; punto di sella.

Enunciati:

- Conseguenze della differenziabilità (Proposizione 5.7, Proposizione 5.9) con dimostrazione
- Condizione sufficiente per la differenziabilità (Proposizione 5.8)
- Significato geometrico del gradiente (Proposizione 5.10) con dimostrazione
- Teorema di Lagrange (Teorema 5.12) con dimostrazione
- Conseguenza del Teorema di Lagrange (Proposizione 5.13) con dimostrazione
- Condizione sufficiente per la lipschitzianità (Proposizione 5.16) con dimostrazione
- Teorema di Schwarz (Teorema 5.17)
- Sviluppo di Taylor del primo e del secondo ordine con resto in forma di Peano (Teorema 5.21)
- Teorema di Weierstrass (Teorema 5.24)
- Teorema di Fermat (Teorema 5.26) con dimostrazione
- Criterio per la classificazione dei punti critici (Teorema 5.27) con dimostrazione.

5. **Calcolo differenziale per funzioni vettoriali (Capitolo 6, § 6.1 – 6.2, 6.4).** Definizioni di differenziabilità in un punto; matrice Jacobiana.

   Enunciati:

   - Teorema di derivazione di funzioni composte (Teorema 6.14).

6. **Curve in $\mathbb{R}^m$ (Capitoli 4,6,9, § 4.6, 6.5, 9.1, 9.2).**

   Definizioni di: curva, sostegno della curva; curva semplice; arco, estremi di un arco; arco chiuso; parametrizzazioni di un segmento, di una circonferenza, di un ellisse; curva in forma cartesiana; curva regolare, regolare a tratti; vettore tangente; curve congruenti (equivalenti e antiequivalenti); lunghezza di un arco regolare, ascissa curvilinea; integrale curvilineo di prima specie e suo significato. Integrali di seconda specie; circuitazione.

   Enunciati:

   - Significato e proprietà dell'ascissa curvilinea.
   - Proprietà degli integrali curvilinei su curve congruenti (Proposizione 9.3 e 9.11)

7. **Estremi vincolati in $\mathbb{R}^2$ (Capitolo 7, § 7.2.1, 7.3).**

   Definizioni di: punto regolare di una curva di livello; punto di estremo; funzione lagrangiana.

   Enunciati:

   - Proprietà di una curva di livello in un punto regolare (Proposizione 7.9) con dimostrazione
   - Metodo parametrico (§ 7.3.1)
   - Metodo dei moltiplicatori di Lagrange (§ 7.3.2)
   - Condizione necessaria per un punto di estremo vincolato (Proposizione 7.16) con dimostrazione

8. **Calcolo integrale (Capitolo 8).**

   Definizioni in $\mathbb{R}^2$: somma inferiore e superiore di una funzione limitata in un rettangolo; funzione integrabile secondo Riemann in un rettangolo; integrale doppio e suo significato geometrico; insieme misurabile e sua misura; funzione integrabile in un insieme misurabile; funzione generalmente continua; insieme semplice rispetto all'asse y (asse x); coordinate polari. In $\mathbb{R}^3$: costruzione dell'integrale triplo; insieme misurabile e sua misura; insieme semplice rispetto all'asse z; coordinate sferiche e cilindriche. Massa, baricentro e momento d'inerzia. Integrali multipli impropri.

   Enunciati:

   - Integrabilità di funzioni continue (Teorema 8.4)
   - Formule di riduzione su rettangoli (Teorema 8.5 e note in rete) con dimostrazione per funzioni continue
   - Caratterizzazione degli insiemi di misura nulla
   - Caratterizzazione degli insiemi misurabili (Teorema 8.10)
   - Proprietà degli insiemi misurabili (Proprietà 8.11 e 8.12)
   - Integrabilità delle funzioni generalmente continue (Teorema 8.15)
   - Formule di riduzione su insiemi semplici (Teorema 8.17) e significato geometrico
   - Proprietà dell'integrale doppio (Teorema 8.20 e Proprietà 8.21)
   - Cambiamento di variabili nell'integrale doppio (Teorema 8.24)
   - Formule di integrazione per fili e per strati
   - Cambiamento di variabili nell'integrale triplo (Teorema 8.29)

- Teorema di Pappo (o primo Teorema di Guldino) (Teorema 8.32) con dimostrazione

9. **Superfici in $\mathbb{R}^3$ (Capitoli 4,6,9, § 4.7, 6.7, 9.3).**

   Definizioni di superficie; sostegno; superficie semplice; superficie cartesiana; superficie di rotazione; superficie regolare; piano tangente, vettore normale; parametrizzazioni congruenti; supeficie orientabile, orientazione, superficie orientata; bordo; integrale di superficie; elemento d'area; area della superficie; integrale di flusso.

   Enunciati:

   - Integrale di superficie su parametrizzazioni equivalenti (Proposizione 9.17) con dimostrazione
   - Secondo Teorema di Guldino (Teorema 9.21) con dimostrazione

10. **Campi conservativi. Teoremi di Green, Gauss e Stokes (Capitoli 6, 9, § 6.3.1, 9.6 e note in rete).**

    Definizioni di: campo conservativo, potenziale; insieme semplicemente connesso; insieme stellato; rotore di un campo; campo irrotazionale; divergenza di un campo; insieme decomponibile.

    Enunciati:

    - Lavoro di un campo conservativo (Proposizione 9.39 e Corollario 9.40) con dimostrazione
    - Caratterizzazione dei potenziali di un campo conservativo (Proposizione 9.41) con dimostrazione
    - Caratterizzazione dei campi conservativi (Teorema 9.42) con dimostrazione
    - Condizione necessaria per la conservatività (Proprietà 9.43) con dimostrazione
    - Equivalenza tra irrotazionalità e conservatività (Teorema 9.45)
    - Teorema di Green (note in rete) con dimostrazione
    - Teorema di Gauss o della divergenza (note in rete) con dimostrazione (in dimensione 2 e 3)
    - Teorema di Stokes (note in rete).