ANALISI MATEMATICA 2	Cognome e Nome	Elettr./Inform.	Bioing.
21/01/2020		☐	☐

PARTE A

1. [4 pt] Data la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^{2n}(-4)^{n+5}}{n}$, determinarne: (a) il raggio di convergenza $\boxed{1/2}$ (b) l'insieme di convergenza $\boxed{[-3/2, -1/2]}$

2. [4 pt] Siano date le osservazioni $(a_1, b_1) = (0,0)$, $(a_2, b_2) = (1,0)$, $(a_3, b_3) = (2,9)$. Determinare e classificare i punti stazionari della funzione d'errore

$$E(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}(a_j x + y - b_j)^2.$$

$P = (9/2, -3/2)$
Punto di minimo, stretto, assoluto

3. [12 pt] Siano date $f(x,y,z) = -2(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ e $g(x,y,z) = 4y^2$. Calcolare

(a) $\mathbf{e}^2 \cdot \nabla(f+g)(1,1,1)$ $\boxed{\frac{2}{3\sqrt{3}} + 8}$ (b) $\iint_\Sigma \nabla f \cdot n\, dS$ $\boxed{8\pi}$

(c) $\iint_\Sigma \nabla g \cdot n\, dS$ $\boxed{8 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3}$ (d) $\iiint_V \mathrm{div}(\nabla g)\, dxdydz$ $\boxed{8 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (5^3 - 1^3)}$

dove $\mathbf{e}^2 = (0,1,0)$, $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 25 = x^2+y^2+z^2\}$ orientata con n uscente e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 25\}$.

4. [5 pt] Determinare l'equazione della retta tangente in (0,1) al grafico della funzione $y = g(x)$ definita implicitamente dall'equazione $f(x,y) = 0$, dove

$$f(x,y) = e^{x^6+y} + 2\sin(x) + y^6 - 1 - e.$$

$\boxed{y = 1 - \frac{2}{6+e}x}$

5. [4 pt] Sia dato il campo $F(x,y) = \left(\frac{1}{x\ln x}, \frac{1}{y}\right)$. Determinare quel potenziale $U(x,y)$ tale che $U(e, e^5) = 0$ $\boxed{U(x,y) = \ln(\ln(x)) + \ln(y) - 5}$

6. [5 pt] Data $f(x,y,z) = xy + 2yz + 7xz$, calcolare il massimo e il minimo assoluti di f, vincolati all'insieme $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 12, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$

minimo : 0
massimo : $7 \cdot 36 = 252$

PARTE B

7. [6 pt] Enunciare il Teorema di Green (o: "Formula di Gauss-Green")

8. [6 pt] Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2}(x^4 y)}{(x^2+y^2)^{\alpha+4}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua in $(0,0)$? $\alpha < -3/2$

è differenziabile in $(0,0)$? $\alpha < -2$

9. [5 pt] Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$ con $g(0) = 0$. Allora $\frac{d}{dt} f(2t, g(t))$ calcolata in $t = 0$ vale: [A] $\nabla f(0,0) \cdot g'(0)$; [B] $\partial_y f(0,0) g'(0)$; [C] $(2, g'(0)) \cdot \nabla f(0,0)$; [D] $2f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$; [E] $\partial_x f(0,0) + g'(0)\partial_y f(0,0)$; [F] $(\partial_x f(0,0) + \partial_y f(0,0))g'(0)$.

10. [5 pt] Quale delle seguenti serie di potenze non converge totalmente in [-1,1]:
[A] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$; [B] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$; [C] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n^{3/2}}$;
[D] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[e^{\frac{1}{n}} - 1\right] x^n$; [E] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$; [F] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] x^n$.

11. [6 pt] Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 16\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq |x|\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$. Determinare

(a) la lunghezza della frontiera di $A \cap B$ $6\pi + 8$

(b) la lunghezza della frontiera di $A \cap B \cap C$ $6\pi + 16$

12. [6 pt] Sia dato il campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$F(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right).$$

Calcolare il lavoro di F lungo:

(a) la frontiera del quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$, orientata in senso *orario*. 2π

(b) la curva $\gamma(t) := (\cos(t), -\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$; 2π

(c) la curva $r(t) := (3 + \cos^3(t), 3 + \sin^3(t))$, $t \in [0, 2\pi]$; 0