ANALISI MATEMATICA 2	Cognome e Nome
27/06/2019	B

PARTE A

1. [4 pt] Data la serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x-5)^{2n}}{7} \cdot \frac{(-2)^n}{(2n)!}$, determinarne

   (a) l'insieme di convergenza $\mathbb{R}$ (b) la somma $f(x)$ $\frac{1}{7}\cos(\sqrt{2}(2x-5))$

2. [6 pt] Sia $f(x,y) = (x^2+y^2)(x^2+y^2-4)$. (a) Calcolare $\nabla f(1,2)$ $(12, 24)$

   (b) Indicare i punti stazionari di f: $A = (0,0)$, $B = \{x^2+y^2 = 2\}$

   (c) Classificarli: A max, B min.

3. [4 pt] Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [0, 5\pi] \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = (2t, -2\sin t, \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2})$

   $\ell(\gamma) =$ $\frac{25}{2}\pi$ [*si ricorda*: $1 + \cos 2t = 2\cos^2 t$.]

4. [5 pt] Dati il campo $F(x,y,z) = (e^y \cos x, (1+e^y)\sin x, 4xy)$ e la superficie cartesiana $\Sigma = \{z = (1+e^y)\cos x,\ 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 3\}$, calcolare $\left|\iint_\Sigma F \cdot n \, dS\right| =$ $9\pi^2$

   [*suggerimento*: calcolare direttamente il flusso, non utilizzare il teorema della divergenza.]

5. [5 pt] Sia data la funzione $F(x,y) = e^{x^2+y} + 2\sin x + y^3 - 1$. Indicando con g la funzione definita implicitamente dall'equazione $F(x, g(x)) = 0$ in un intorno di $(0,0)$ e con $T_1(x)$ il polinomio di Maclaurin del primo ordine di g, calcolare $T_1(0) =$ 0

6. [5 pt] Calcolare i <u>valori</u> (non i punti) di massimo e di minimo assoluti di $f(x,y) = 2 + xy$ vincolati all'insieme $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 12x^2 + 14y^2 = 48\}$ $2 \pm 2\sqrt{\frac{6}{7}}$

7. [5 pt] Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2,\ \ x^2+y^2 \le 2-z\}$. Calcolare

   $\iiint_\Omega e^{z^2-4z}\, dx\, dy\, dz =$ $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-4})$

PARTE B

8. [5 pt] Data $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, con $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), xz, F_3(x,y,z))$, scrivere le espressioni

   (a) $\operatorname{div} F =$ $\partial_x F_1 + \partial_z F_3$ (b) $\operatorname{rot} F =$ $(\partial_y F_3 - x, \partial_z F_1 - \partial_x F_3, z - \partial_y F_1)$

   (c) fornire l'esempio di **un** campo $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che: $\operatorname{div} G = 0$, e $\operatorname{rot} G$ non è il campo costante $\equiv (0,0,0)$. $G =$

9. [8 pt] Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2}(x^4 y)}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   è continua in $(0,0)$? $\alpha < 5$

   è differenziabile in $(0,0)$? $\alpha < 4$

10. [5 pt] Sia $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ e siano $f_n : I \to \mathbb{R}$ continue per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora:

   (a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge totalmente su I se $\sum_{n\in\mathbb{N}} \max_{x\in I}\{|f_n(x)|\} < \infty$ ~~VERO~~ FALSO

   (b) $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge totalmente su I se $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\max_{x\in I}\{f_n(x)\}| < \infty$ VERO ~~FALSO~~

   (c) $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge totalmente su I se esiste una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $|f_n(x)| \leq a_n$ per ogni $x \in I$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ e vale $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty$ ~~VERO~~ FALSO

   (d) se $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge puntualmente su I allora converge totalmente su ogni intervallo chiuso contenuto in $(0,1)$ VERO ~~FALSO~~

   (e) se $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge totalmente su I allora la somma è una funzione continua in ogni punto di I ~~VERO~~ FALSO

11. [4 pt] Sia $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A $\Omega = \Omega^\circ$; ~~B~~ $\Omega = \overline{\Omega}$; ~~C~~ $\Omega = \partial\Omega$; D $\partial\Omega = \emptyset$; E $\Omega = \emptyset$;
   ~~F~~ $\Omega^\circ = \emptyset$; G $\overline{\Omega} = \emptyset$; H $\partial\Omega \subseteq \Omega^\circ$ ~~I~~ $\Omega^\circ \subseteq \partial\Omega$.

12. [6 pt] Dato $V = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$, sia $I \subseteq \mathbb{R}$ il più grande intervallo tale che

$$\iiint_V \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{a}{2}}}\, dx\, dy\, dz < +\infty \quad \forall a \in I. \text{ Allora}$$

   A $I = \mathbb{R}$; B $I = [3,+\infty)$; ~~C~~ $I = (-\infty,3)$; D $I = (3,+\infty)$; E $I = (-\infty,3]$.

13. [6 pt] Sia dato il campo $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$F(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right). \qquad \text{Calcolare il lavoro di } F \text{ lungo:}$$

   (a) la curva $r(t) := (3+\cos^5(t), 3+\sin^5(t))$, $t \in [0,2\pi]$; 0

   (b) la frontiera del quadrato $[-2,2] \times [-2,2]$, orientata in senso antiorario. -2π

   (c) la curva $\gamma(t) := (\cos(t), -\sin(t))$, $t \in [0,2\pi]$; 2π