ANALISI MATEMATICA 2 27/09/2019	Cognome e Nome

PARTE A

1. [4 pt] Data la serie di potenze $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{2^n}(x-1)^{n-1}$, determinare

   (a) l'insieme di convergenza $]-1, 3[$ (b) il valore $f(2)$ 6

2. [6 pt] Sia $f(x,y) = (3\sqrt{3} + x(x-3\sqrt{3})(x+3\sqrt{3}))(1+\ln(1+y^2))$. (a) Indicare i punti stazionari di f $A = (3,0)$, $B = (-3,0)$ (b) Classificarli A sella, B sella

3. [5 pt] Sia dato il campo $F(x,y,z) = \left(y\sin(xy), x\sin(xy) - \frac{z}{y^2}, \frac{1}{y}\right)$. Determinare:

   (a) un potenziale U per F; $U(x,y,z) = -\cos(xy) + \frac{z}{y}$

   (b) il potenziale V tale che $V(0,1,2) = 0$. $V(x,y,z) = U(x,y,z) - 1$

4. [5 pt] Dati la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\ 1 = x^2+y^2+z^2\}$ orientata verso l'alto e il campo $F(x,y,z) = (2y + \sin(z), \tan(z) - 2x, e^{x^2+y^2} - z)$, calcolare il flusso del rotore

   $\iint_\Sigma (\nabla \times F) \cdot n \, dS = -4\pi$

5. [5 pt] Sia $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^2$ definito da $\mathcal{T} := \{y \leq 2x-2\} \cap \{2y \leq -3x+10\} \cap \{3y \geq -x+1\}$.

   (a) Calcolare l'area di $\mathcal{T}$ $7/2$ (b) Calcolare l'area della superficie cartesiana $\Sigma = \{z = x+4y+2, (x,y) \in \mathcal{T}\}$ $\frac{21}{2}\sqrt{2}$

6. [5 pt] Calcolare i valori del massimo e del minimo assoluti di $f(x,y) = xy + 2$ vincolati all'insieme $\mathcal{T}$ (definito in 5.) Massimo: 6 Minimo: -2

7. [4 pt] Determinare la retta tangente in $(0,0)$ al grafico della funzione $y = g(x)$ definita implicitamente dall'equazione $0 = f(x,y) = xe^{xy} - \sin(4y)$ $y = \frac{x}{4}$

PARTE B

8. [6 pt] Enunciare il teorema di Lagrange (o "Teorema del valor medio") per $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

9. [5 pt] La serie di potenze $\sum_{n=9}^{+\infty} \frac{x^n}{n^{2\alpha}}$ converge totalmente in $[0,1]$ per $\alpha \in$ $]\frac{1}{2}, +\infty[$

10. [6 pt] Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dire quali delle seguenti implicazioni sono vere.

    (a) Se f è derivabile, allora f è continua VERO ~~FALSO~~

    (b) Se f è differenziabile, allora f è derivabile ~~VERO~~ FALSO

    (c) Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue, allora f è differenziabile ~~VERO~~ FALSO

    (d) Se tutte le derivate direzionali sono continue allora f è differenziabile ~~VERO~~ FALSO

    (e) Se f è differenziabile allora $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ esistono e sono continue VERO ~~FALSO~~

    (f) Se $\lim_{n\to\infty} f(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}) = f(\underline{0})$ per ogni (x,y) allora f è continua in $\underline{0}$ VERO ~~FALSO~~

11. [6 pt] Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 < 9\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$. Determinare

    (a) la lunghezza della frontiera di A 8π

    (b) la lunghezza della frontiera di $A \cap B$ $8\pi + 4$

12. [5 pt] Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$. Allora $\frac{\partial}{\partial x}\{g(f(ax,y))\}$ vale:

    ~~A~~ $a\partial_x f g'(f)$; B $g'(f)(a\partial_x f + \partial_y f)$; C $a\partial_x g(f)\partial_x f$;
    D $\nabla g(f) \cdot (a\partial_x f, \partial_y f)$; E $g'(f) + ag(f)f'$; F $a(\nabla g(f) \cdot \nabla f)$.

13. [6 pt] Siano $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con $g(x_0, y_0) = 0$. Si considerino gli enunciati:

    (I) esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R} : \nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$.

    (II) (x_0, y_0) è punto di estremo per f vincolato a $\{g = 0\}$.

    Allora

    (a) **(I)** $\Rightarrow$ **(II)** VERO ~~FALSO~~

    (b) **(II)** $\Rightarrow$ **(I)** VERO ~~FALSO~~.

    (c) **(II)** $\Rightarrow$ $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$ VERO ~~FALSO~~

    (d) **(II)** $\wedge\ \nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$ $\Rightarrow$ **(I)** ~~VERO~~ FALSO

    (e) $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$ $\Rightarrow$ **(II)** VERO ~~FALSO~~

    (f) $\nabla\{f(x,y) - \lambda g(x,y)\}|_{(x_0,y_0,\lambda_0)} = \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$ **(I)** ~~VERO~~ FALSO