ANALISI MATEMATICA 2 16/07/2018	Cognome e Nome

PARTE A

1. [6 pt] Data la serie di potenze $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{x^{3n}}{n!}$, determinare

(a) l'insieme di convergenza $\boxed{\mathbb{R}}$ (b) $f^{(6)}(0)$ $\boxed{= 6! \cdot a_2 = 6! \cdot \frac{1}{4 \cdot 2}}$

(c) la somma della serie $\boxed{e^{x^3/2} - 1}$

2. [6 pt] Sia $f(x, y) = e^{x-y}(x^2-2y^2)$. (a) Calcolare $\nabla f(x, y)$ $\boxed{e^{x-y}\left(x^2+2x-2y^2,\ 2y^2-4y-x^2\right)}$

(b) Indicare i punti stazionari di f $\boxed{A=(0,0) \quad B=(-4,-2)}$ (c) Classificarli $\boxed{A: \text{sella} \quad B: \text{max.}}$

3. [6 pt] Calcolare il lavoro L del campo

$$F(x, y) = \left(4 + \ln(y + 10), \frac{x+1}{y+10}\right)$$

lungo la curva $\gamma(t) = (t\cos(2\pi t), t\sin(2\pi t))$, $t \in [0, 8]$.

$U = (x+1)(4+\ln(y+10))$

$L = \boxed{8(\ln(10)+4)}$

4. [4 pt] Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4y + z + 2x - 2 = 0,\ \overbrace{x \geq 1, -x + 1 > y \geq -2}^{T}\}$$

$$|\Sigma| = \boxed{2\sqrt{21}} = \iint_\Sigma 1\, dS = \iint_T \sqrt{1+(-2)^2+(-4)^2}\, dxdy$$

5. [6 pt] Dati il campo $F(x, y, z) = (2xz^2, 3x^2 + z, z^3 + x)$ e la superficie

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 2z^2 = 4\right\},$$

calcolare il flusso di F uscente da Σ, riportando i passaggi salienti.

$$\iint_\Sigma F\cdot n\, dS = \iiint_V 5z^2\, dxdydz = \frac{\pi\sqrt{2}\cdot 2^5}{3}$$

dove $V = \left\{z \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}],\ x^2+y^2 \leq 4 - 2z^2\right\}$

6. [6 pt] Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie sferica di centro l'origine e raggio 5. Calcolare

$$\min_\Sigma \{\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{25} - x + 2y + 2z\} = \boxed{10}$$

Moltiplicatori di Lagrange $\Rightarrow$
$$\begin{cases} -1 = 2\lambda x \\ +2 = 2\lambda y \\ +2 = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2 = 25 \end{cases}$$

PARTE B

7. [±6 pt] Vero o Falso (Attenzione: una risposta giusta vale 1 punto, una sbagliata -1, una lasciata in bianco 0.) Data la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

   (a) La serie converge puntualmente su $(-1, 1]$ ~~VERO~~ FALSO

   (b) La serie converge totalmente su $(-1, 1)$ VERO ~~FALSO~~

   (c) La serie converge puntualmente su $(-1, 1)$ ~~VERO~~ FALSO

   (d) La serie converge totalmente su $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ~~VERO~~ FALSO

   (e) La serie converge puntualmente su $[-1, 1]$ VERO ~~FALSO~~

   (f) La serie converge totalmente su $(-1, 1]$ VERO ~~FALSO~~

8. [5 pt] Enunciare il teorema di Fermat (per funzioni di n variabili).

9. [10 pt] Per ogni $\alpha > 0$ si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3y^5}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad = \frac{\rho^8(\cos\vartheta)^3(\sin\vartheta)^5}{(\rho^2)^\alpha}$$

Determinare

   (a) per quali valori di α la funzione f è continua in $(0, 0)$? $\alpha < 4$

   (b) per quali valori di α la funzione f è differenziabile in $(0, 0)$? $\alpha < 7/2$

10. [6 pt] Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, y \in (0, 1) \cup (1, 2]\}$. Indicare

   (a) La parte interna di A $\{0 < x < 1 \ , \ y \in (0,1) \cup (1,2)\}$

   (b) La frontiera di A $\{0,1\} \times [0,2] \ \cup \ [0,1] \times \{0,1,2\}$

   (c) La chiusura di A $[0,1] \times [0,2]$

11. [7 pt] Sia $x = g(y, z)$ la funzione definita implicitamente da

$$f(x, y, z) = 2e^{xy} + z\sin(x) + y^2 - 3 = 0,$$

in un intorno di $(0, 1, 1)$. Calcolare

$$\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = \boxed{-\frac{2}{3}} = \frac{-\partial_y f(0,1,1)}{\partial_x f(0,1,1)}$$