Specificare una settimana per la prova orale:

☐ 4–8.02 ☐ 11–14.02 ☐ 18-21.02 ☐ 25–28.02

ANALISI MATEMATICA 2 Prova scritta 01/02/2013	COGNOME e Nome	firma

Quando lo spazio lasciato a disposizione lo consente (Es. 1 e 2), riportare i passaggi salienti.

1. [5 pt] Trovare i punti di massimo e di minimo della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 2x + y + 12, \qquad \text{nell'insieme} \qquad G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 - xy + \frac{3}{4}y^2 \le 4\right\}.$$

2. [8 pt] Siano

- $Q := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0,\pi/2],\ y \in [0,\pi/2],\ z = 0\}$,
- Σ la piramide avente base Q e vertice $P = (\pi/4, \pi/4, 1)$,
- $F(x,y,z) := \big(\sin(x+z)\sin(y), \cos(x+z)\cos(y), \log(|xy| + e)\big)$,

- Calcolare il flusso di F uscente dalla superficie *totale* di Σ

- Calcolare il flusso del *rotore* di F uscente dalla superficie *totale* di Σ

- Calcolare il flusso del *rotore* di F attraverso Q, diretto verso l'alto.

3. [5 pt] Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ le funzioni definite da

$$f(x,y,z) = \left(xy^3, (z+x)^2, 5xyz\right), \qquad g(u,v,w) = \left(e^u \cos(v), \sin(e^w)\right).$$

Qual è la dimensione della matrice Jacobiana di $h = g \circ f$? $\boxed{}$ Calcolarne la

prima colonna $\boxed{}$

4. [5 pt] Sia data la regione $R = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le 2\pi,\}$, il punto $P = \left(\sqrt{2}+\frac{1}{2},\ \sqrt{2}+\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e la superficie $\sigma : R \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(u,v) = \big((2+\cos v)\cos u, (2+\cos v)\sin u, \sin v\big). \qquad \text{Calcolare:}$$

- I parametri u_0, v_0 tali che $\sigma(u_0, v_0) = P$: $\quad (u_0, v_0) = \boxed{}$
- il piano tangente a σ nel punto P:

  $\Pi(u,v) = \boxed{}$

5. [4 pt] Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n\,3^n \log(n)}$, determinarne il raggio di convergenza $R = \boxed{}$. Detto I l'intervallo di convergenza, determinare l'insieme $I \cap (-\infty, 2] = \boxed{}$.

6. [3 pt] Domanda di teoria: enunciare il criterio di convergenza assoluta.

1. [5 pt] Trovare i punti di massimo e di minimo della funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = 2x + y + 12,$$

nell'insieme

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 - xy + \frac{3}{4}y^2 \leq 4\}.$$

Soluzione: $\nabla f(x, y) = \big(2, 1\big)$ quindi non ci sono punti critici interni a G. Per studiare il comportamento sulla frontiera di G usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \quad 2 &= \lambda(6x - y) \\ \quad 1 &= \lambda\big(\frac{3}{2}y - x\big) \\ g(x, y) &= 0 \end{cases}$$

dove $g(x, y) = 3x^2 - xy + \frac{3}{4}y^2 - 4$. Troviamo

$$3x - \frac{y}{2} = \frac{3}{2}y - x \quad \Rightarrow \quad 2x = y,$$

e sostituendo nell'ultima equazione

$$3x^2 - 2x^2 + 3x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1, \quad y = \pm 2.$$

Dato che i coefficienti di f son positivi, $(1, 2)$ è un massimo assoluto e $(-1, -2)$ è un minimo assoluto.

2. [8 pt] Siano

- $Q := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2} \ \text{ e } \ z = 0\big\}$,
- Σ la piramide avente base Q e vertice $P = (\pi/4, \pi/4, 1)$,
- $F(x, y, z) := \big(\sin(x + z)\sin(y), \cos(x + z)\cos(y), \log(|xy| + e)\big)$.

- Calcolare il flusso di F uscente dalla superficie di Σ.

  Soluzione. Utilizziamo il teorema di Gauss:

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot n = \int_{\Sigma} \operatorname{div} F,$$

  dove n è il versore normale entrante.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ &= \cos(x + z)\sin(y) - \cos(x + z)\sin(y) + 0 = 0. \end{aligned}$$

- Il flusso del rotore attraverso la superficie totale è zero, come conseguenza del teorema della divergenza o di quello di Stokes. Per esempio, il teorema della divergenza ci dice che

$$\int_{\partial\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n = \int_{\Sigma} \operatorname{div}(\operatorname{rot} F),$$

  e la divergenza di un rotore è sempre nulla.

- Calcolare il flusso del *rotore* di F attraverso Q, diretto verso l'alto.

Soluzione. Dato che $n = (0,0,1)$, (ponendo $\ell = \pi/2$)

$$\begin{aligned}
\int_Q \operatorname{rot} F \cdot n &= \int_Q \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \Big|_{z=0} dx\, dy \\
&= -2 \int_0^\ell \int_0^\ell \sin(x) \cos(y)\, dx\, dy \\
&= -2 \left(\int_0^\ell \sin(x) dx \right) \left(\int_0^\ell \cos(y)\, dy \right) \\
&= 2\,(\cos(\ell) - 1) \sin(\ell) = -2.
\end{aligned}$$

Alternativamente, grazie al teorema di Stokes (o di Green), si poteva calcolare $\int_{\partial Q} F \cdot \tau$ sui lati del quadrato Q, ottenendo

$$\begin{aligned}
\int_Q \operatorname{rot} F \cdot n = &\int_0^\ell F(x,0,0) \cdot (1,0,0)\, dx + \int_0^\ell F(\ell,y,0) \cdot (0,1,0)\, dy \\
&+ \int_0^\ell F(x,\ell,0) \cdot (-1,0,0)\, dx + \int_0^\ell F(0,y,0) \cdot (0,-1,0)\, dy \\
= &\; 0 + \cos(\ell) \int_0^\ell \cos(y)\, dy - \sin(\ell) \int_0^\ell \sin(x)\, dx - \int_0^\ell \cos(y)\, dy,
\end{aligned}$$

che dà, naturalmente, lo stesso risultato.

3. [5 pt] Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ le funzioni definite da

$$f(x,y,z) = \big(xy^3, (z+x)^2, 5xyz\big)\,, \qquad g(u,v,w) = \big(e^u \cos(v), \sin(e^w)\big).$$

Soluzione: la funzione composta

$$h(x,y,z) = g \circ f(x,y,z) = \left(e^{xy^3} \cos(x+z)^2, \sin(e^{5xyz})\right),$$

è definita da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$, quindi la matrice Jacobiana ha dimensione 2×3. La prima colonna contiene le derivate parziali rispetto a x delle due componenti, e si può scrivere (in orizzontale, per comodità)

$$\left(y^3 e^{xy^3} \cos(z+x)^2 - 2e^{xy^3} \sin(z+x)^2 (z+x)\ ,\ 5\cos(e^{5xyz}) yze^{5xyz}\right).$$

4. [5 pt] Sia data la regione $R = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le 2\pi, \}$ e la superficie $\sigma : R \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(u,v) = \big((2+\cos v)\cos u,\ (2+\cos v)\sin u,\ \sin v\big).$$

Calcolare le seguenti quantità

- $P = \sigma(\pi/4, \pi/4)$.

- il piano tangente a σ nel punto $P = \left(\sqrt{2}+\frac{1}{2},\ \sqrt{2}+\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

  Soluzione: Calcoliamo intanto

$$\begin{aligned}\partial_u\sigma(u,v) &= \big(-(2+\cos v)\sin u,\ (2+\cos v)\cos u,\ 0\big)\\ \partial_v\sigma(u,v) &= \big(-\sin v\cos u,\ -\sin v\sin u,\ \cos v\big).\end{aligned}$$

  Usiamo la formula

$$\begin{aligned}\Pi(u,v) &= \sigma(\pi/4,\pi/4) + \partial_u\sigma(\pi/4,\pi/4)(u-\pi/4) + \partial_v\sigma(\pi/4,\pi/4)(v-\pi/4)\\ &= P + (-\sqrt{2}-1/2,\ \sqrt{2}+1/2, 0)(u-\pi/4) + (-1/2,\ -1/2, \sqrt{2}/2)(v-\pi/4).\end{aligned}$$

5. [4 pt] Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(x-2)^n}{n\,3^n\log(n)}$, determinarne il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza.

   Soluzione: poniamo $y = (x-2)/3$ e studiamo la serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{y^n}{n\,\log(n)}.$$

   Usiamo il criterio del rapporto (ma si può usare anche quello della radice)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\log(n+1)}{n\log(n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\log(n+1)}{\log(n)}\right| = 1.$$

   Quindi, il raggio di convergenza della serie $a_n y^n$ è 1. Per il criterio di Leibniz, la serie converge in $y = -1$.

   In conclusione, il raggio di convergenza è 3 e il punto $x = -1$ appartiene all'intervallo di convergenza, e quindi

$$I \cap (-\infty, 2] = [-1, 2].$$

6. Riguardo alla domanda di teoria, notare che la *definizione* di convergenza assoluta, per una serie numerica, non coincide con il *criterio* di convergenza assoluta (per la stessa serie). Si confrontino la Definizione 1.22 e il Teorema 1.24 del libro di testo (Canuto-Tabacco, Analisi Matematica II).