Specificare almeno due possibilità (solo per chi intende sostenere l'orale in questa sessione):

☐ 17.09 ☐ 18.09 ☐ 19.09 ☐ 20.09 ☐ 21.09 ☐ 24.09 ☐ 27.09

ANALISI MATEMATICA 2 Prova scritta 02/07/2012	COGNOME e Nome	firma

1. [6 pt] Classificare i punti critici della funzione

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) = (3-x)^2 + y^2 + \sqrt{6}yz + 2z^3.$$

2. [5 pt] Siano

- $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 8x + 12 + y^2 \leq 0\}$,
- σ il grafico della funzione $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) = xy^2$,
- $f(x,y,z) := \dfrac{z - 4y^2}{\sqrt{y^4 + 4xz + 1}}$.

Calcolare

$$\int_\sigma f =$$

3. [5 pt] Si consideri il sottoinsieme convesso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ avente come vertici i punti $A = (0,0)$, $B = (3,0)$, $C = (4,2)$, $D = (1,2)$. Calcolare

$$\int_\Omega 2(2x-3)e^{-y^2}\,dx\,dy =$$

4. [6 pt] Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y^2, \text{ e } (x,y) \neq (0,0), \\ xy & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia dato il vettore $v = (2,1)$. Calcolare, *se esistono*, i seguenti oggetti

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$ $\boxed{}$
- $\nabla f(0,0) =$ $\boxed{}$
- $\mathrm{d}f_{(0,0)} =$ $\boxed{}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) =$ $\boxed{}$

5. [5 pt] Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big[\cos(2/n) - 1\big](2x - x_0)^n$, determinarne il

raggio di convergenza $\boxed{}$ e l'insieme di convergenza $\boxed{}$

6. [3 pt] Domanda di teoria: enunciare il teorema di Weierstraß.

1. [6 pt] Classificare i punti critici della funzione

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) = (\beta - x)^2 + y^2 + ayz + bz^3.$$

Soluzione: calcoliamo

$$\nabla f(x,y,z) = \big(2(x-\beta), 2y + az, ay + 3bz^2\big).$$

Ponendo $\nabla f = 0$, si ricava $x = \beta$ e, con qualche conto,

$$y = -\frac{az}{2}, \qquad -\frac{a^2 z}{2} + 3bz^2 = 0, \qquad z\Big(3bz - \frac{a^2}{2}\Big) = 0,$$

si giunge a due punti stazionari

$$x_1 = \beta,\ y_1 = 0,\ z_1 = 0, \qquad x_2 = \beta,\ y_2 = -\frac{a^3}{12b},\ z_2 = \frac{a^2}{6b}.$$

La matrice Hessiana è:

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & a & 6bz \end{pmatrix}.$$

Dato che la matrice è a blocchi (1x2), il primo autovalore è positivo $\lambda = 2$. Per gli altri due autovalori, invece, si tratta di studiare le matrici

$$Hf(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Hf(P_2) = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Dato che la prima ha traccia positiva e determinante negativo, è una sella, mentre la seconda ha traccia e determinante positivi, quindi è un minimo relativo. Accoppiando con i punti critici rispetto alla x, si troveranno un minimo relativo e una sella.

2. [5 pt] Siano

- $D := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2xx_0 + x_0^2 - x_0 + y^2 \le 0\big\}$,
- σ il grafico della funzione $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) = xy^2$,
- $f(x,y,z) := \dfrac{z - x_0 y^2}{\sqrt{y^4 + 4xz + 1}}$.

Calcolare

$$\int_\sigma f =$$

Soluzione. Notiamo che l'insieme D si puo' riscrivere come

$$D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + y^2 \leq x_0\big\},$$

e quindi, in coordinate polari, come

$$D = \big\{(x_0 + \rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) : \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{x_0}, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\big\}.$$

Calcoliamo quindi

$$\begin{aligned}
\int_\sigma f &= \int_D f(x, y, \varphi(x, y))\|\nu(x, y)\|\,dx\,dy \\
&= \int_D \frac{xy^2 - x_0y^2}{\sqrt{y^4 + 4x(xy^2) + 1}}\sqrt{y^4 + 4x^2y^2 + 1}\,dx\,dy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{x_0}} \Big\{(x_0 + \rho\cos\vartheta)(\rho\sin\vartheta)^2 - x_0(\rho\sin\vartheta)^2\Big\}\rho\,d\rho\,d\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{x_0}} \rho^4\cos\vartheta\sin^2\vartheta\,d\rho\,d\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi}\cos\vartheta\sin^2\vartheta\,d\vartheta\int_0^{\sqrt{x_0}}\rho^4\,d\rho \\
&= \left[\frac{\sin^3\vartheta}{3}\right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi}\int_0^{\sqrt{x_0}}\rho^4\,d\rho = 0.
\end{aligned}$$

3. [5 pt] Si consideri il sottoinsieme convesso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ avente come vertici i punti $A = (0, 0)$, $B = (\ell, 0)$, $C = (\ell + 1, m)$, $D = (1, m)$. Calcolare

$$\int_\Omega m(2x - \ell)e^{-y^2}\,dx\,dy = \boxed{}$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega m(2x - \ell)e^{-y^2}\,dx\,dy &= \int_0^m me^{-y^2}\left(\int_{y/m}^{y/m+\ell} 2x - \ell\,dx\right)dy \\
&= \int_0^m me^{-y^2}\Big[x^2 - x\ell\Big]_{y/m}^{y/m+\ell}dy \\
&= \int_0^m me^{-y^2}\Big((y/m + \ell)^2 - (y/m)^2 - \ell^2\Big)dy \\
&= \int_0^m 2\ell ye^{-y^2}\,dy \\
&= -\ell\Big[e^{-y^2}\Big]_0^m = \ell\big(1 - e^{-m^2}\big).
\end{aligned}$$

4. [6 pt] Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = y^2, \text{ e } (x, y) \neq (0, 0), \\ xy & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Soluzione: la funzione non è continua in $(0,0)$: infatti

$$\lim_{y\to 0} f(y^2, y) = 1 \neq 0 = f(0,0).$$

In particolare non è neanche differenziabile, quindi non esiste il differenziale $\mathrm{d}f_{(0,0)}$. Calcolando le derivate parziali tramite la definizione, si trova che $\nabla f(0,0) = (0,0)$ e

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(2t,t) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{2t^2 - 0}{t} = 0.\end{aligned}$$

5. [5 pt] Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big[\cos(\alpha/n) - 1\big](\alpha x - x_0)^n$, determinarne il

raggio di convergenza $\boxed{}$ e l'insieme di convergenza $\boxed{}$

Soluzione: poniamo $y = \alpha x - x_0$. Ricordando lo sviluppo

$$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2} + o(x^3), \quad \text{per } x \to 0,$$

usiamo il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cos(\alpha/(n+1)) - 1}{\cos(\alpha/n) - 1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Quindi, il raggio di convergenza per la serie y^n è 1. Ritornando alla serie originale, dato che la serie di termine generale $(-1)^n/n^2$ converge assolutamente, concludiamo che l'insieme di convergenza è dato dall'intervallo $\left[\dfrac{x_0 - 1}{\alpha}, \dfrac{x_0 + 1}{\alpha}\right]$ (e che il raggio di convergenza è $1/\alpha$).