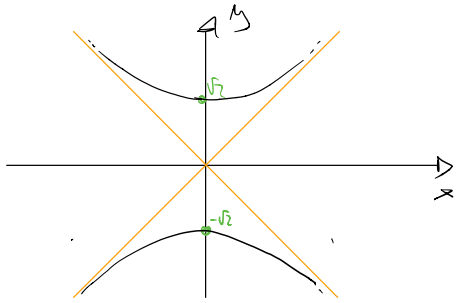
Tutorato 1 Aprile

per info e chiarimenti
lorenzo.loi01@universitadipavia.it
irene.schimperna@universitadipavia.it

① $f(x,y) = x^2 - y^2$ disegnare il grafico e le curve di livello $-2,-1,0,1,2$

curva di livello $f(\bar{x}) = c$, $c \in \mathbb{R}$

a) $f(x,y) = x^2 - y^2 = -2 \rightarrow \dfrac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \dfrac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = -1$ [iperbole fuochi asse y]



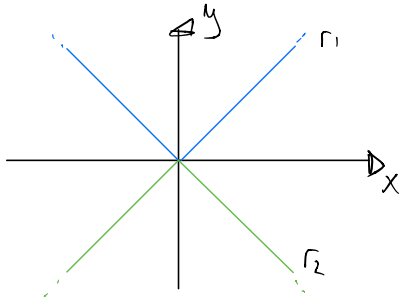
$F_1 = (0; \sqrt{2})$
$F_2 = (0; -\sqrt{2})$

Asintoti : $y = \pm x$

b) $f(x,y) = x^2 - y^2 = -1 \rightarrow$ come nel caso precedente ma $F_1 = (0;1)$ e $F_2 = (0;-1)$

c) $f(x,y) = x^2 - y^2 = 0$

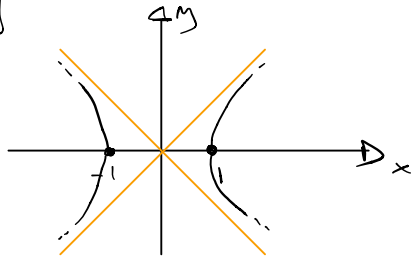
$y^2 = x^2$, $y = \pm |x|$ 2 rette



d) $f(x,y) = x^2 - y^2 = 1$ [iperbole fuochi x]

$F_1 = (1;0)$
$F_2 = (-1;0)$

Asintoti
$y = \pm x$



e) $f(x,y) = x^2 - y^2 = 2 \rightarrow$ come nel caso d) ma con fuochi

$F_1 = (\sqrt{2};0)$ $F_2 = (-\sqrt{2};0)$

② $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, cos'è il grafico di $f(\bar{x}) = \bar{a} \cdot \bar{x} + b$?

$f(\bar{x}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n + b$

f è lineare e $f(\bar{0}) = b$, quindi è un iperpiano che interseca b nell'origine

Dato $a = (1,2)$, disegnare le curve di livello $-2\ -1\ 0\ 1\ 2$ per $f(x,y) = \bar{a} \cdot \bar{x}$

$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 2y \quad \rightarrow \quad z = x + 2y$ Piano in $\mathbb{R}^2$

curve di livello sono Rette:

a) $x + 2y = -2 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x - 1$

b) $x + 2y = -1 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

c) $x + 2y = 0 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x$

d) $x + 2y = 1 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

e) $x + 2y = 2 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + 1$

Ex. 3,4,5: Vedi parte II

⑥ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad f(\bar{x}) = |x|^\alpha$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

verificare che $\nabla f(\bar{x}) = \alpha \bar{x} |x|^{\alpha-2}$

$$\nabla f(\bar{x}) = (\partial_{x_1} f(\bar{x}), \dots, \partial_{x_n} f(\bar{x}))$$

$$f(\bar{x}) = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\partial_{x_1} f(\bar{x}) = 2x_1 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} \frac{\alpha}{2}$$

$$= \alpha x_1 (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{\alpha-2}{2}} = \alpha x_1 |\bar{x}|^{\alpha-2}$$

$$\partial_{x_2} f(\bar{x}) = 2x_2 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} \frac{\alpha}{2}$$

$$= \alpha x_2 |\bar{x}|^{\alpha-2}$$

$$\to \nabla f(\bar{x}) = (\alpha x_1 |\bar{x}|^{\alpha-2}, \alpha x_2 |\bar{x}|^{\alpha-2}, \dots, \alpha x_n |\bar{x}|^{\alpha-2})$$

$$\nabla f(\bar{x}) = \alpha |\bar{x}|^{\alpha-2} (x_1, \dots, x_n) = \alpha \bar{x} |\bar{x}|^{\alpha-2}$$

⑦ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{a}$ $\quad \bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$

a) calcolare $\nabla f(\bar{x})$

$$\nabla f(\bar{x}) = (\partial_{x_1} f(\bar{x}), \dots, \partial_{x_n} f(\bar{x}))$$

$$f(\bar{x}) = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n \quad , \quad \partial_{x_1} f(\bar{x}) = a_1 \quad \partial_{x_2} f(\bar{x}) = a_2$$

$$\longrightarrow \nabla f(\bar{x}) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \bar{a}$$

b) mostrare che f è differenziabile

Ogni componente di ∇f è continua $\to$ f è differenziabile

c) calcolare il piano tangente nel punto $\bar{x}_0$

$$z = f(\bar{x}_0) + \nabla f(\bar{x}_0) \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0)$$

$$\to z = \bar{x}_0 \cdot \bar{a} + \bar{a} \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) = \bar{x}_0 \cdot \bar{a} + \bar{a} \cdot \bar{x} - \bar{a} \cdot \bar{x}_0 = \bar{a} \cdot \bar{x}$$

⑧ Mostrare che $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = x^2 + y^2$ è differenziabile in (x_0, y_0) con la definizione

si calcola $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) - \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$

$\nabla f(x_0,y_0) = (2x_0, 2y_0)$

$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho\sin\theta \end{cases}$

$\begin{cases} x - x_0 = \rho\cos\theta \\ y - y_0 = \rho\sin\theta \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2 - 2x_0(x-x_0) - 2y_0(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{(x-x_0)(x+x_0) + (y-y_0)(y+y_0) - 2x_0\rho\cos\theta - 2y_0(\rho\sin\theta)}{\rho}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho}\cos\theta(2x_0 + \rho\cos\theta) + \cancel{\rho}\sin\theta(2y_0 + \rho\sin\theta) - 2x_0\rho\cos\theta - 2y_0\cancel{\rho}\sin\theta}{\cancel{\rho}}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \cancel{2x_0\cos\theta} + \cancel{\rho\cos^2\theta} + \cancel{2y_0\sin\theta} + \cancel{\rho\sin^2\theta} - \cancel{2x_0\cos\theta} - \cancel{2y_0\sin\theta} = 0$$

⑨ Determinare l'equazione del piano tangente di

- $f(x,y) = e^{y^2 - x^2}$ in $P(-1;1)$
- $g(x,y) = x\ln(y)$ in $P(4;1)$

$z = f(\bar{x}_0) + \nabla f(\bar{x}_0)\cdot(\bar{x} - \bar{x}_0)$ nel punto $\bar{x}_0$

f: $f(P) = e^{1-1} = 1$

$\nabla f(P) = \nabla f(x,y)\Big|_P = \left(-2xe^{y^2-x^2} ; 2ye^{y^2-x^2}\right)\Big|_P$

$= \left(2e^0 ; 2e^0\right) = (2;2)$

$(\bar{x} - P) = \begin{pmatrix} x - (-1) \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$

$z = 1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} = 1 + 2(x+1) + 2(y-1)$

$\Rightarrow z = 1 + 2(x+1) + 2(y-1)$

g: $\quad g(P) = 4\ln(1) = 0$

$$\nabla g(P) = \left(\ln(y) \,;\, \frac{x}{y} \right)\Big|_P = \left(\ln(1) \,;\, \frac{4}{1} \right) = (0\,;\,4)$$

$$\left(\overline{x-P}\right) = \begin{pmatrix} x-4 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow z = 0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-4 \\ y-1 \end{pmatrix} = 4(y-1)$$

$$z = 4(y-1)$$