Tutorato del 1.04.2019

2 Funzioni di n variabili reali

2.2 Limiti e continuità

Esercizio 3
Studiare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^5}{x^2+y^4}.$$

Una possibile traccia di svolgimento: (a) mostrare che $\left|\frac{x^3+y^5}{x^2+y^4}\right| \leq |x|+|y|$; (b) utilizzare le coordinate polari.

□

Soluzione:

(a) $$\left|\frac{x^3+y^5}{x^2+y^4}\right| = \left|\frac{x^3}{x^2+y^4}+\frac{y^5}{x^2+y^4}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2+y^4}\right| + \left|\frac{y^5}{x^2+y^4}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2}\right| + \left|\frac{y^5}{y^4}\right| = |x|+|y|$$

(b) $$|x|+|y| = |\rho\cos\theta|+|\rho\sin\theta| \leq \rho+\rho = 2\rho.$$

Conclusione:

$$|f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)| \leq 2\rho \to 0 \quad \text{per } \rho\to 0,$$

quindi il limite cercato vale 0.

Esercizio 4
Studiare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x}.$$

□

Soluzione: lungo la curva $\gamma(x) = (x,0)$ si ha che

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+0^2}{x} = 0,$$

mentre lungo la curva $\gamma(y) = (y^2,y)$ si ha che

$$\lim_{y\to 0} f(y^2,y) = \lim_{y\to 0}\frac{y^4+y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^2} = 1,$$

quindi il limite di f non esiste. L'idea di guardare proprio la curva $x=y^2$ può venire dalle coordinate polari:

$$f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = \frac{\rho^2}{\rho\cos\theta} = \frac{\rho}{\cos\theta}.$$

Ora, f non è definita per $\theta = \pm\pi/2$ (cioè sull'asse y), ma viene il sospetto che scegliendo una curva che si avvicini a (0,0) in modo tangente all'asse delle y si possa far tendere f a infinito, quindi, per esempio, $y = \sqrt{x}$ oppure $x = y^2$.

Esercizio 5
Studiare la continuità della funzione f al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(xy)}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

□

Soluzione: osservo che $\sin t \sim t$ per $t \to 0$, quindi posso equivalentemente studiare

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

al di fuori di $(0,0)$. In coordinate polari:

$$f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{\rho^{2\alpha}}.$$

Conclusione: se $4 - 2\alpha > 0$, cioè $\alpha < 2$, allora

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq \rho^{4-2\alpha} \to 0 \quad \text{per } \rho \to 0,$$

e la funzione è continua in (0,0). Viceversa, se $4 - 2\alpha \leq 0$ si possono trovare delle direzioni in cui il il limite di f non è zero, e la funzione non è continua.