$$f(x,y) = x e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

a) $\partial_x f = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1-x^2)$

$\partial_y f = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (-xy)$

Punti stazionari: $A = (1,0)$ $\quad B = (-1,0)$

$\partial^2_{xx} f = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (x^3 - 3x)$

$\partial^2_{xy} f = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (1-x^2)\cdot(-y)$

$\partial^2_{yy} f = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (xy^2 - x)$

$Hf(A) = \frac{1}{\sqrt{e}} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, def. negativa $\Rightarrow$ A pto di max. locale

$Hf(B) = \frac{1}{\sqrt{e}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, def. positiva $\Rightarrow$ B p.to di min. locale.

b) $|f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)| = \left| \rho\cos\vartheta \, e^{-\frac{\rho^2}{2}} \right| \leq \rho e^{-\rho^2/2}$

Dato che $\lim_{\rho \to +\infty} \rho e^{-\rho^2/2} = 0$, concludiamo che

$$\lim_{|(x,y)| \to +\infty} f(x,y) = 0$$

e quindi i punti di estremo trovati sono effettivamente punti di massimo e minimo <u>globali</u>.

Esercizio 2

Classificare i punti stazionari, studiare la convessità e determinare eventuali punti di massimo e minimo assoluti su $\mathbb{R}^2$ per la funzione

$$f(x,y) = x^8 + 2(x-y)^2.$$

Soluzione:

$$\nabla f(x,y) = (8x^7 + 4(x-y), -4(x-y)).$$

Unico punto stazionario: $A = (0,0)$. Matrice Hessiana:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 56x^6 + 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}. \qquad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

L'Hessiana in (0,0) è semidefinita positiva, ma dato che in generale l'Hessiana è definita positiva (se $x \neq 0$) o semidefinita positiva (se $x = 0$), concludiamo che f è convessa. Dato che $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il punto A è di minimo assoluto. La funzione non ha massimo assoluto perché tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

$\square$

EX. 3

$P=(0,-1)$ $\quad f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $f(0,-1)=e-1-e+1=0$

$\nabla f(x,y)=\left(e^{x-y}+2x-e\ ,\ -e^{x-y}-2y\right)$

$\nabla f(0,-1)=(e-e,\ \underbrace{-e+2}_{\neq 0})$

$\Rightarrow$ Definisce implicitamente $\begin{cases} g\in C^\infty,\ g(0)=-1 \\ f(x,g(x))=0 \end{cases}$

$$\frac{d}{dx}\{f(x,g(x))\}=(1-g')e^{x-g}+2x-2gg'-e=0$$

in $x=0$, $g=-1$ $\Rightarrow (1-g')e+2g'=e$

$$g'(2-e)=0 \Rightarrow g'=0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\{f(x,g(x))\}=\left(-g''+(1-g')^2\right)e^{x-g}+2-2(g')^2-2gg''=0$$

$$\Rightarrow -g''e+2+2g''=0$$

$$g''=\frac{-2}{2-e}>0 \Rightarrow x=0 \text{ min}$$

Ex. 4

d) $\nabla f = \left((y-1)e^{xy-x} - \sin x + 2,\ xe^{xy-x} - 2 \right)$

$\nabla f(0,1) = (2, -2)$

$g(0) = 1$

$g'(0) = \frac{-2}{-2} = 1$

retta tangente : $y = x + 1$