ES. 1

$F(x,y) = (y \sin x + xy\cos x + e^y,\ g(x) + xe^y)$ $\quad g(0)=0$

? $g(x)$ tale che F sia conservativo

Deve valere $\partial_x F_2 - \partial_y F_1 = 0$

$\partial_x F_2 = g'(x) + e^y$ $\quad \partial_y F_1 = \sin x + x\cos x + e^y$

$\rightarrow g'(x) = \sin x + x\cos x$

$g(x) = \int \sin x + x\cos x \, dx = -\cos x + x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, dx =$

$= -\cancel{\cos x} + x \operatorname{sen} x + \cancel{\cos x} + c$

$g(0) = 0 + c = 0 \rightarrow c = 0$ $\quad \boxed{g(x) = x \operatorname{sen} x}$

ES 2 $\gamma(t) = \left(\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right), t\right)$ $\quad t \in [0, 4\pi]$

$F(x,y,z) = (1 + y^3 e^{xy},\ e^{xy}(2y + xy^2) - \sin x,\ z)$

? $\int_\gamma F \cdot d\gamma$

Si può calcolare che $\operatorname{rot}(F) = 0$, quindi possiamo calcolare il lavoro attraverso il potenziale

$\partial_x U = 1 + y^3 e^{xy} \rightarrow U = \int 1 + y^3 e^{xy} dx = x + y^2 e^{xy} + b(y,z)$

$\partial_y U = 2y e^{xy} + xy^2 e^{xy} + \partial_y b = e^{xy}(2y + xy^2) - \sin y$

$\partial_y b = -\sin y \rightarrow b(y,z) = \int -\sin y \, dy = \cos y + c(z)$

$U = x + y^2 e^{xy} + \cos y + c(z)$ $\quad \partial_z U = \frac{dc}{dz} = z \rightarrow c(z) = \int z \, dz = \frac{z^2}{2} + k$

$U = x + y^2 e^{xy} + \cos y + \frac{z^2}{2}$

$\gamma(4\pi) = (0, 1, 4\pi)$ $\quad \gamma(0) = (0, 1, 0)$

$\int_\gamma F \cdot d\gamma = U(\gamma(4\pi)) - U(\gamma(0)) = 1 + \cos(1) + \frac{16\pi^2}{2} - (1 + \cos(1)) = 8\pi^2$

Es. 2 – Soluzione alternativa.

Dato che $\mathbf{F}$ è conservativo, posso calcolare il lavoro lungo un *cammino equivalente* a γ, ma più semplice. Per esempio

$$r(t) = (0, 1, t), \quad t \in [0, 4\pi].$$

Si controlla facilmente che $r(0) = \gamma(0) = (0, 1, 0)$ e $r(4\pi) = \gamma(4\pi) = (0, 1, 4\pi)$. Allora

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\gamma &= \int_r \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}r \\
&= \int_0^{4\pi} \mathbf{F}(r(t)) \cdot r'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{4\pi} (2, 2, t) \cdot (0, 0, 1)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{4\pi} \\
&= 8\pi^2.
\end{aligned}$$