Tutorato del 29.04.2019

6 Funzioni a valori vettoriali

Esercizio 1
Siano date

$$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = (2x, x - y), \quad g(u, v) = (v, 3v - 2u).$$

(a) Calcolare la funzione composta $h = g \circ f$ e quindi la matrice Jacobiana $Dh(x, y)$.
(b) Calcolare la matrice Jacobiana della funzione composta attraverso la formula

$$D(g \circ f) = Dg(f(x, y))Df(x, y).$$

□

Svolgimento.
(a) $h(x, y) = (x - y, -x - 3y)$.

$$Dh(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$Dg(f(x, y))Df(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2
Siano date le matrici

$$W^{(1)} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \qquad W^{(2)} \in \mathbb{R}^{d \times m},$$

la funzione di attivazione

$$F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, \quad F(z_1, \ldots, z_m) = (\mathrm{Tanh}(z_1), \ldots, \mathrm{Tanh}(z_m)),$$

dove $\mathrm{Tanh}(z) = \frac{\mathrm{Sinh}(z)}{\mathrm{Cosh}(z)}$, e sia $\mathbf{y}$ l'output della rete neurale a due strati

$$\mathbf{y} = W^{(2)} F(W^{(1)} \mathbf{x}).$$

Dati $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$, indicando con w^1_{ij} e w^2_{ki} le componenti delle matrici $W^{(1)}$ e $W^{(2)}$, calcolare

$$\frac{\partial E}{\partial w^2_{ki}}, \qquad \frac{\partial E}{\partial w^1_{ij}},$$

dove E indica la funzione di errore

$$E = \frac{1}{2} |\mathbf{y} - \mathbf{t}|^2.$$

□

Svolgimento. La rete è la composizione di tre funzioni. Indicando, per esempio, con le lettere $\mathbf{z}, \mathbf{a}, \mathbf{y}$ i tre output, si ha:

I. $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto \mathbf{z} = W^{(1)}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. In componenti:

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}^1 x_j \quad \text{per } i = 1, \dots, m.$$

Quindi,

$$\frac{\partial z_i}{\partial w_{ij}^1} = x_j.$$

II. $\mathbb{R}^m \ni \mathbf{z} \mapsto \mathbf{a} = F(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^m$. In componenti:

$$a_i = \mathrm{Tanh}(z_i) \quad \text{per } i = 1, \dots, m.$$

Quindi,

$$\frac{\partial a_i}{\partial w_{ij}^1} = \frac{\partial a_i}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial w_{ij}^1} = (1 - \mathrm{Tanh}^2(z_i))x_j. \tag{6.1}$$

III. $\mathbb{R}^m \ni \mathbf{a} \mapsto \mathbf{y} = W^{(2)}\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$. In componenti:

$$y_k = \sum_{i=1}^{m} w_{ki}^2 a_i \quad \text{per } k = 1, \dots, d.$$

Quindi,

$$\frac{\partial y_k}{\partial w_{ij}^1} = w_{ki}^2 \frac{\partial a_i}{\partial w_{ij}^1} \overset{(6.1)}{=} w_{ki}^2 (1 - \mathrm{Tanh}^2(z_i))x_j. \tag{6.2}$$

Analogamente,

$$\frac{\partial y_k}{\partial w_{ki}^2} = a_i. \tag{6.3}$$

In conclusione, dato che

$$E = \frac{1}{2}|\mathbf{y} - \mathbf{t}|^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}(y_k - t_k)^2,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_{ki}^2} &= (y_k - t_k)\frac{\partial y_k}{\partial w_{ki}^2} \\
&\overset{(6.3)}{=} (y_k - t_k)a_i, \\
\frac{\partial E}{\partial w_{ij}^1} &= \sum_{k=1}^{d}(y_k - t_k)\frac{\partial y_k}{\partial w_{ij}^1} \\
&\overset{(6.2)}{=} \sum_{k=1}^{d}(y_k - t_k)w_{ki}^2(1 - \mathrm{Tanh}^2(z_i))x_j.
\end{aligned}$$

7 Superfici parametriche

Esercizio 3
Dato $A = [0,1] \times [0,4\pi]$, sia definita la superficie

$$\sigma(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), v), \qquad (u,v) \in A.$$

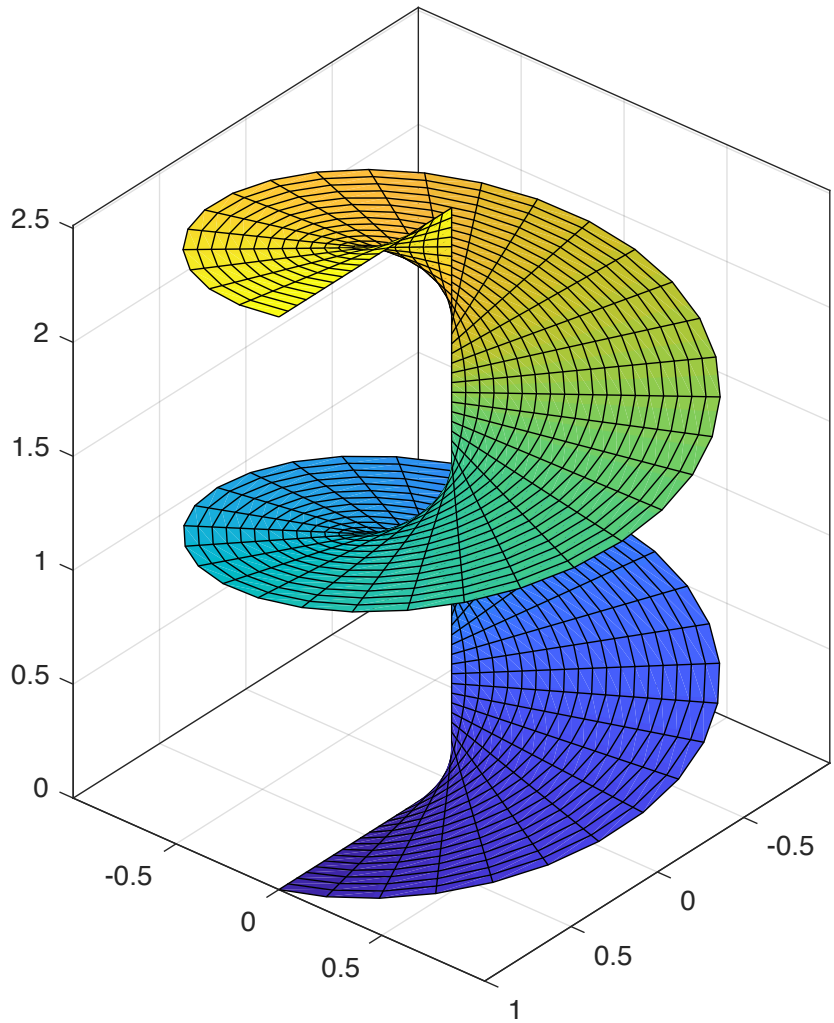
(a) Disegnare alcune linee coordinate di σ. (Per esempio, $u = 0, u = 1/2, u = 1$ e $v = 0, v = \pi/2, v = 2\pi$.)

(b) Disegnare $\sigma(A) \in \mathbb{R}^3$.

(c) Calcolare la matrice Jacobiana $D\sigma$.

(d) Determinare eventuali punti singolari della superficie.

(e) Calcolare il vettore normale $\nu(u,v)$ e il versore normale $n(u,v)$.



□