ANALISI MATEMATICA 2 Prova scritta 15/02/2016	Cognome e Nome firma

1. [4 pt] Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = 2y^3 - 6xy + x^2$. Indicando i passaggi salienti, determinare i punti critici della funzione e classificarli.

2. [7 pt] Sia dato il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(\sinh(x + y),\ \sinh(x + y) + 2yz^2 \cos(y^2),\ 2z \sin(y^2)\big)\,.$$

   (a) Trovare, se esiste, il potenziale U di $\mathbf{F}$.

   (b) Calcolare (indicando solo il risultato) il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) = (t \cos t,\ -t \cos t,\ \sin t).$$

   (c) Indicare se γ è chiusa, semplice, regolare.

   (d) Disegnare approssimativamente il sostegno (o immagine) di γ nel piano xz.

(a)

(b)

(d)

(c)

3. [4 pt] Siano $\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0\}$, $\quad f(x, y, z) = z + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Specificando i passaggi salienti, calcolare l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma f =$$

4. [3 pt] Sia $f(x,y) = \cos(y^2/x)$. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico della funzione in $x = 1/\pi$, $y = \sqrt{3}/3$.

5. [4 pt] Siano $\ell > 0$ e $T \subset \mathbb{R}^2$ il triangolo omogeneo di vertici $(0,0), (2\ell, 0), (0, 3\ell)$. Determinare la coordinata y del baricentro di T, scrivendo i passaggi salienti.

6. [5 pt] Siano E il rettangolo del piano xy di vertici $(0,0), (3,0), (3,1), (0,1)$ e Ω il solido $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in E,\ x^2 \leq z \leq 9\}$. Sia $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x + yx, e^z, 3xy)$.
(a) Calcolare $\operatorname{div} \mathbf{F}(x,y,z)$. (b) Calcolare $\operatorname{rot} \mathbf{F}(x,y,z)$.
(c) Indicando i passaggi principali, calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ uscente dalla frontiera di Ω .

(a)

(b)

(c)

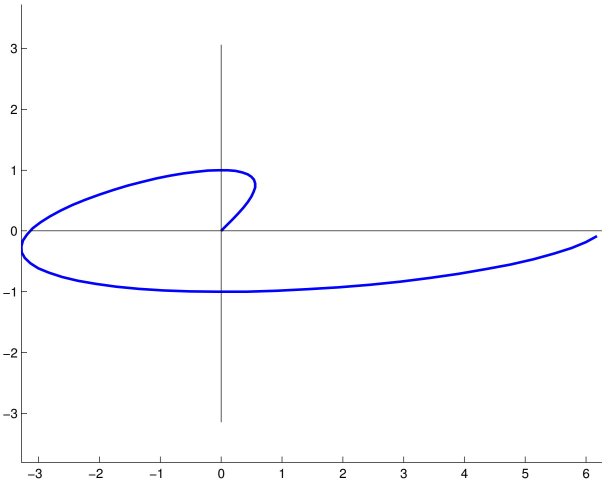
7. [6 pt] Sia data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^{\alpha-2} + \frac{1}{n^{\alpha+2}} \right) (x-2)^n$. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

il raggio di convergenza $R =$

l'insieme di convergenza $I =$

SOLUZIONI

1. $\nabla f = (-6y + 2x, 6y^2 - 6x)$, quindi i punti critici sono $P = (0,0)$ e $Q = (9,3)$. La matrice Hessiana è
$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 12y \end{bmatrix}, \quad \text{che risulta indefinita in } P \text{ e definita positiva in } Q,$$
per cui P è punto di sella e Q è punto di minimo locale stretto.

2. (a) $U(x,y,z) = \cosh(x+y) + z^2 \sin(y^2) + c$.
   (b) Dato che $\mathbf{F}$ è conservativo, il lavoro è dato da
$$U(\gamma(2\pi)) - U(\gamma(0)) = U(2\pi, -2\pi, 0) - U(0,0,0) = 1 - 1 = 0.$$
   (c) γ è semplice, regolare, non è chiusa.
   (d) 

3. La superficie Σ in coordinate sferiche è
$$\Sigma = \begin{cases} x = 2\cos\theta \sin\phi, \\ y = 2\sin\theta\sin\phi, \\ z = 2\cos\phi \end{cases} \qquad \text{per} \quad \theta \in [0, 2\pi],\ \ \phi \in [0, \pi/2].$$
Riguardo alla funzione f, in coordinate sferiche si ha $z = 2\cos\phi$,
$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{4\cos^2\theta\sin^2\phi + 4\sin^2\theta\sin^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{4\sin^2\phi}} = \frac{1}{2\sin\phi},$$
dove nell'ultimo passaggio si è sfruttato che $\phi \in [0, \pi]$, e quindi $\sin\phi \geq 0$. L'integrale superficiale, ricordando il fattore $4\sin\phi\, d\theta\, d\phi$, è quindi
$$\begin{aligned} \int_\Sigma f &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos\phi + \frac{1}{2\sin\phi}\right) 4\sin\phi\, d\theta\, d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos\phi + \frac{1}{2\sin\phi}\right) 4\sin\phi\, d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8\cos\phi\sin\phi + 2)\, d\phi \\ &= 16\pi \frac{\sin^2\phi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4\pi\frac{\pi}{2} = 8\pi + 2\pi^2. \end{aligned}$$
(L'integrale $\int \cos\phi\sin\phi\, d\phi$ può anche esser svolto come
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\sin\phi\, d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2\phi)}{2} d\phi = -\frac{\cos(2\phi)}{4}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \quad)$$

4. Siano $x_0 = 1/\pi$, $y_0 = \sqrt{3}/3$. Le derivate parziali di f sono

$$\partial_x f = \frac{y^2}{x^2}\sin(y^2/x), \qquad \partial_y f = -\frac{2y}{x}\sin(y^2/x).$$

L'equazione del piano tangente è

$$\begin{aligned} z &= f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &= \cos(\pi/3) + \frac{\pi^2}{3}\sin(\pi/3)\left(x - \frac{1}{\pi}\right) - \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\sin(\pi/3)\left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi^2}{6}\left(x - \frac{1}{\pi}\right) - \pi\left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}\pi^2}{6}x - \pi y + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}. \end{aligned}$$

5. T è, per esempio, y-semplice: $T = \left\{0 \le x \le 2\ell,\ 0 \le y \le \frac{3}{2}(2\ell - x)\right\}$.

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{|T|}\int_T y\,dx\,dy = \frac{1}{3\ell^2}\int_0^{2\ell}\int_0^{\frac{3}{2}(2\ell-x)} y\,dy\,dx \\ &= \frac{1}{3\ell^2}\int_0^{2\ell}\frac{9}{4}\frac{(2\ell-x)^2}{2}\,dx = \frac{1}{8\ell^2}(x-2\ell)^3\Big|_0^{2\ell} = \ell. \end{aligned}$$

(Naturalmente, è corretto anche calcolare la media delle tre coordinate y)

6. (a) $\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = 2 + y$. (b) $\operatorname{rot}\mathbf{F}(x,y,z) = (3x - e^z, -3y, -x)$.

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_E\int_{x^2}^9 2 + y\,dz\,dx\,dy \\ &= \int_0^3\int_0^1 (2+y)(9-x^2)dy\,dx \\ &= \left(\int_0^3 9 - x^2dx\right)\left(\int_0^1 2 + y\,dy\right) \\ &= \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=3}\left[2y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = (27-9)\frac{5}{2} = 45. \end{aligned}$$

7. Utilizzando il criterio della radice si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^{\alpha-2} + \frac{1}{n^{\alpha+2}}} = 1, \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R},$$

quindi $R = 1$. Per l'insieme di convergenza, la serie calcolata in $x = 2 \pm 1$ vale

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^{\alpha-2} + \frac{1}{n^{\alpha+2}}\right)(\pm 1)^n,$$

che (confronto con la serie armonica generalizzata)

- converge assolutamente per $-1 < \alpha < 1$, $\Rightarrow I = [1,3]$
- converge semplicemente per $\alpha \in]-2,-1] \cup [1,2[$, $\Rightarrow I = [1,3[$
- diverge per $\{\alpha \le -2\} \cup \{\alpha \ge 2\}$, $\Rightarrow I =]1,3[$