ANALISI MATEMATICA 2 Prova scritta 1/02/2016	Cognome e Nome firma

1. [4 pt] Si consideri la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n (x-3)^n$. Determinare

il raggio di convergenza $R =$ $\boxed{}$ l'insieme di convergenza $I =$ $\boxed{}$

2. [9 pt] Siano $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 6, |y| \le 10\}$, $f(x,y) := (x-3)^2(y-5)$.

   (a) Determinare il *punto di massimo* di f su ∂A (la frontiera di A).

   (b) Determinare i punti stazionari di f su $\overset{\circ}{A}$ (la parte interna di A).

   (c) Classificare i punti stazionari di f trovati al passo (b).

(a)	(b)

(c)

(Non è richiesto di indicare il procedimento, solo i risultati.)

3. [3 pt] Sia data

$$f(x,y) := \frac{\sin\left(\pi x^2 + \pi y/4\right)}{e^{\frac{\cosh(xy)}{\cosh(-1)}}}.$$

Calcolare $\frac{e}{\sqrt{2}}\partial_x f(1,-1) =$ $\boxed{}$

4. [8 pt] Sia $R \subset \mathbb{R}^2$ il parallelogramma di vertici (in senso antiorario)

$$A = (0,0), \qquad B = (2,1), \qquad C = (3,4), \qquad D = (1,3).$$

   (a) calcolare l'area di R;

   (b) calcolare il baricentro di R;

   (c) calcolare $\int_R x\,dx\,dy$;

   (d) decomporre R in unione di insiemi y-semplici (è consentito, ma non necessario, scrivere direttamente R come insieme y-semplice).

(a)

(b)

(c)

(d)

(Per (a), (b), (c) non è richiesto di indicare il procedimento, solo i risultati.)

5. [9 pt] Si considerino il solido $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le (9-z)^2,\ 0 \le z \le 8\}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = \big(2\arctan(y^2 z),\ -5y,\ 3\sqrt{x^2+y^2}\big)$. Indicando il procedimento,
   (a) calcolare il volume di Ω;
   (b) calcolare il flusso totale di F uscente da $\partial\Omega$;
   (c) calcolare il flusso di F uscente dalla superficie laterale di Ω.

(a)

(b)

(c)

Nota: Chiamiamo *basi* di Ω gli insiemi

$$B_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 81,\ z=0\} \quad \text{e} \quad B_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1,\ z=8\}.$$

Chiamiamo *superficie* laterale di Ω l'insieme $\partial\Omega \setminus \{B_1 \cup B_2\}$.

SOLUZIONI

1. Per il criterio della radice
$$\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{n}}=2.$$
Quindi $R=1/2$. Per l'insieme di convergenza, la serie calcolata in $x=3\pm R$ vale
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2+\frac{2}{n}\right)^n\left(\pm\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}(\pm1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$
Dato che il termine generale non è infinitesimo, concludiamo che la serie non converge in $\pm R$ e l'insieme di convergenza è $I=(3-1/2,3+1/2)=\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$.

2. a) Dato che f è monotona crescente in y, il massimo si avrà per $y=10$. Sull'intervallo $x\in[-6,6]$, la parabola $f(x,10)=5(x-3)^2$ ha punto di massimo in $x=-6$. Quindi il punto di massimo ha coordinate $M=(-6,10)$.

   b) Calcolando $\nabla f(x,y)=(2(x-3)(y-5),(x-3)^2)$ e imponendo $\nabla f=0$ si trova il segmento $x=3$, $y\in(-10,10)$.

   c) Notiamo che la funzione f vale zero nei punti stazionari. Studiando il segno di f in un intorno di $(3,y)$ si vede che

   - $(3,y)$ è un punto di minimo locale, per $y>5$,
   - $(3,5)$ è un punto di sella
   - $(3,y)$ è un punto di massimo locale, per $y<5$.

3.
$$\partial_x f(x,y)=e^{\frac{\cosh(xy)}{\cosh(-1)}}\frac{2\pi x\cos\left(\pi x^2+\pi y/4\right)-\sin\left(\pi x^2+\pi y/4\right)y\sinh(xy)/\cosh(-1)}{\left(e^{\frac{\cosh(xy)}{\cosh(-1)}}\right)^2}$$
$$\begin{aligned}\frac{e}{\sqrt{2}}\partial_x f(1,-1)&=\frac{e}{\sqrt{2}}\frac{2\pi\cos(3\pi/4)+\sin(3\pi/4)\tanh(-1)}{e}\\&=-\pi+\frac{\tanh(-1)}{2}=-\left(\pi+\frac{\tanh(1)}{2}\right)\end{aligned}$$

4. (a) In generale: dati due vettori $\mathbf{u},\mathbf{v}$ nel piano xy (in $\mathbb{R}^3$), il parallelogramma R individuato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ ha i vertici in $O=(0,0,0),\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}+\mathbf{v}$. L'area di R si può calcolare come *base x altezza*, cioè $\big||\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\alpha\big|$, dove α è l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, ovvero come $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$, dove $\times$ è il prodotto vettoriale. Nel nostro caso: Definiamo i vettori $\mathbf{u}=(2,1,0)$ e $\mathbf{v}=(1,3,0)$. $|R|=|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=|6-1|=5$.

   (b) Il baricentro è $(x_G,y_G)=\frac{\mathbf{u}+\mathbf{v}}{2}=\left(\frac{3}{2},2\right)$.

   (c) Dato che la prima coordinata del baricentro si può trovare anche come
$$x_G=\frac{1}{|R|}\int_R x\,dx\,dy,\quad \text{l'integrale richiesto vale } |R|x_G=\frac{15}{2}.$$

(d) I quattro lati di R (AB, BC, CD, DA) giacciono, rispettivamente, sulle rette

$$r_1(x) = \frac{1}{2}x, \qquad r_2(x) = 3(x-3)+4, \qquad r_3(x) = \frac{1}{2}(x-1)+3, \qquad r_4(x) = 3x.$$

Possiamo decomporre quindi $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$, con

$$\begin{aligned} R_1 &= \{x \in [0,1], r_1(x) \le y \le r_4(x)\}, \\ R_2 &= \{x \in [1,2], r_1(x) \le y \le r_3(x)\}, \\ R_3 &= \{x \in [2,3], r_2(x) \le y \le r_3(x)\}. \end{aligned}$$

Il punto (a) si può anche svolgere calcolando l'integrale doppio

$$\begin{aligned} \int_R 1\,dx\,dy &= \int_{R_1} 1\,dx\,dy + \int_{R_2} 1\,dx\,dy + \int_{R_3} 1\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 r_4(x) - r_1(x)\,dx + \int_1^2 \dots \end{aligned}$$

ma chiaramente non è il modo più veloce.

5. a) Integriamo per strati. Definiamo gli strati $\Omega(z) := \{x^2 + y^2 \le (9-z)^2\}$, che sono dei dischi di raggio $9-z$ e area $|\Omega(z)| = \pi(9-z)^2$.

$$|\Omega| = \int_0^8 \int_{\Omega(z)} 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^8 \pi(9-z)^2\,dz = -\frac{\pi}{3}(9-z)^3\Big|_0^8 = \frac{\pi}{3}(3^6-1).$$

b) Per il teorema della divergenza

$$\int_{\partial\Omega} F\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_\Omega \mathrm{div}F\,dx\,dy\,dz = -5|\Omega| = -\frac{5\pi}{3}(3^6-1).$$

c) Il flusso attraverso le basi è:

$$\begin{aligned} \int_{B_1} F\cdot(0,0,-1)dS &= -\int_{B_1} 3\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = -\int_0^{2\pi}\int_0^9 3\rho^2 d\rho\,d\theta = -2\pi\cdot 3^6, \\ \int_{B_2} F\cdot(0,0,1)dS &= \int_{B_2} 3\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3\rho^2 d\rho\,d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

Per differenza, il flusso attraverso la superficie laterale Σ è

$$\int_\Sigma F\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_{\partial\Omega} F\cdot\mathbf{n}\,dS - \int_{B_1} F\cdot\mathbf{n}\,dS - \int_{B_2} F\cdot\mathbf{n}\,dS = \frac{\pi}{3}\big(5-5\cdot 3^6+6\cdot 3^6-6\big) = \frac{\pi}{3}(3^6-1).$$