1 Piano tangente

Esercizio 1. Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie data nel punto indicato

1. $z = x^2 y \qquad P = (1, 1, 1)$,
2. $xy^2 z^3 = 12 \qquad P = (3, 2, 1)$.

Soluzione.

1. La superficie è il grafico della funzione $f(x, y) = x^2 y$, si può usare quindi la parte lineare dello sviluppo di Taylor di f

$$z = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Calcoli: $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2)$, $\nabla f(1, 1) = (2, 1)$,

$$z = 1 + 2(x - 1) + 1(y - 1) = 2x + y - 2.$$

2. La superficie è data in forma implicita, mediante l'equazione $f(x, y, z) = 0$, con $f(x, y, z) = xy^2 z^3 - 12$. Si può quindi usare la relazione

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Calcoli: $\nabla f(x, y, z) = (y^2 z^3, 2xyz^3, 3xy^2 z^2)$, $\nabla f(3, 2, 1) = (4, 12, 36) = 4(1, 3, 9)$,

$$0 = (1, 3, 9) \cdot (x - 3, y - 2, z - 1) = x - 3 + 3y - 6 + 9z - 9 \quad \Rightarrow \quad x + 3y + 9z = 18.$$

Osservazione: si potevano invertire i procedimenti usati, vedere cioè la prima superficie come definita implicitamente da $f(x, y, z) = x^2 y - z = 0$, e la seconda come grafico di $f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{12}{xy^2}}$.

2 Funzioni implicite

2.1 Funzioni di 2 variabili

Esercizio 2. Siano dati

$$f(x, y) = x^5 + 3x^2 y - 2y^4 - 1, \qquad P = (1, 0).$$

1. Verificare l'esistenza di una curva di livello regolare in un intorno del punto dato.
2. Calcolare l'equazione della retta tangente alla curva di livello 0 in P.
3. Usare lo sviluppo di Taylor di ordine 2 per approssimare la funzione implicita.

Soluzione.

1. Per applicare il teorema della funzione implicita è necessario che

$$(a)\, f \in C^1; \quad (b)\, f(P) = 0; \quad (c)\, \nabla f(P) \neq (0,0).$$

Dato che f è un polinomio, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$; si verifica immediatamente che $f(P) = 1 + 0 - 0 - 1 = 0$. Calcoliamo

$$\nabla f(x,y) = \left(5x^4 + 6xy, 3x^2 - 8y^3\right), \qquad \nabla f(P) = (5,3),$$

in particolare $\partial_y f(P) = 3 \neq 0$. Quindi, per il teorema della funzione implicita, esiste un intorno I di $x_0 = 1$ e un'unica funzione $g \in C^1(I)$ tale che $f(x, g(x)) \equiv 0$ per ogni $x \in I$.

2. Per calcolare la retta tangente a g notiamo:

$$g(1) = 0; \qquad g'(1) = -\frac{\partial_x f(1,0)}{\partial_y f(1,0)} = -\frac{5}{3}. \qquad \text{La retta è quindi} \quad y = -\frac{5}{3}(x-1).$$

3. Per calcolare $g''(1)$ deriviamo due volte la relazione $f(x, g(x)) = 0$ e calcoliamo il risultato in $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned}
x^5 + 3x^2 g - 2g^4 - 1 &= 0, && (\text{rel. } f(x,g) = 0)\\
5x^4 + 6xg + 3x^2 g' - 8g^3 g' &= 0, && (\text{derivata prima})\\
20x^3 + 6(g + xg') + 3(2xg' + x^2 g'') - 8(3g^2 (g')^2 + g^3 g'') &= 0, && (\text{derivata seconda})\\
20 + 6(g + g') + 3(2g' + g'') - 8(3g^2(g')^2 + g^3 g'') &= 0, && (\text{uso } x = 1)\\
20 + 6g' + 3(2g' + g'') &= 0, && (\text{uso } g(1) = 0)\\
20 + 10 + 10 + 3g'' &= 0, && (\text{uso } g'(1) = -5/3).
\end{aligned}$$

Abbiam quindi ricavato $g''(1) = -40/3$. Lo sviluppo di Taylor del secondo ordine (con resto in forma di Peano) è:

$$\begin{aligned}
g(x) &= g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{g''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2 \quad \text{per } x \to x_0\\
&= -\frac{5}{3}(x-1) - \frac{20}{3}(x-1)^2 + o(x - x_0)^2 \quad \text{per } x \to x_0.
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{R}$ e siano dati

$$f(x,y) = x^2 y + y + a(e^x - 1), \qquad P = (0,0).$$

1. Verificare l'esistenza di una funzione implicita $y = g(x)$ il cui grafico coincida con la curva di livello 0 di f in un intorno del punto dato.

2. Calcolare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) + ax}{x^2}.$$

Soluzione.

1. Dato che f è la somma di un polinomio e di un esponenziale, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$; si verifica immediatamente che $f(P) = 0 + 0 + 0 = 0$. Calcoliamo

$$\nabla f(x, y) = \big(2xy + ae^x, x^2 + 1\big), \qquad \nabla f(P) = (a, 1),$$

in particolare $\partial_y f(P) = 1 \neq 0$. Quindi, per il teorema della funzione implicita, esiste un intorno I di $x_0 = 0$ e un'unica funzione $g \in C^1(I)$ tale che $f(x, g(x)) \equiv 0$ per ogni $x \in I$.

2. Lo sviluppo di Taylor di g in 0, di ordine 2 con resto di Peano, è

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0.$$

Dato che

$$g(0) = 0, \qquad g'(0) = -\frac{\partial_x f(0, 0)}{\partial_y f(0, 0)} = -a,$$

usando lo sviluppo al secondo ordine calcoliamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) + ax}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - ax + \frac{g''(0)}{2}x^2 + ax}{x^2} = \frac{g''(0)}{2}.$$

Calcoliamo quindi $g''(0)$ come nell'esercizio precedente.

$$\begin{aligned}
x^2 g + g + a(e^x - 1) &= 0, && \text{(rel. } f(x, g) = 0\text{)} \\
2xg + x^2 g' + g' + ae^x &= 0, && \text{(derivata prima)} \\
2g + 2xg' + 2xg' + x^2 g'' + g'' + ae^x &= 0, && \text{(derivata seconda)} \\
2g + g'' + a &= 0, && \text{(uso } x = 0\text{)} \\
g'' + a &= 0, && \text{(uso } g(0) = 0\text{)}
\end{aligned}$$

Abbiam quindi ricavato $g''(0) = -a$. Il limite richiesto vale dunque $-a/2$.

2.2 Funzioni di 3 variabili

Esercizio 4. Verificare che l'equazione

$$x^2 + 2x + e^y + y - 2z^3 = 0$$

definisce una funzione $y = g(x, z)$ in un intorno di $P = (x_0, z_0) = (-1, 0)$. Tale funzione rappresenta una superficie; si scriva l'equazione del piano ad essa tangente in P.

Soluzione. Se $x = -1$ e $z = 0$, perché l'equazione sia soddisfatta, occorre che $1 - 2 + e^y + y - 0 = 0$. Si vede (per esempio graficamente) che l'unica soluzione è $y = 0$. Definiamo

$$f(x, y, z) = x^2 + 2x + e^y + y - 2z^3, \qquad Q = (-1, 0, 0).$$

Per applicare il teorema della funzione implicita, notiamo che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e $f(Q) = 0$. Calcoliamo

$$\nabla f(x, y, z) = \left(2x + 2, e^y + 1, -6z^2\right), \qquad \nabla f(Q) = (0, 2, 0).$$

Dato che $\partial_y f(Q) \neq 0$, possiamo applicare il teorema della funzione implicita, che assicura l'esistenza di un intorno U di P e di una funzione $g \in C^1(U)$ tale che $f(x, g(x, z), z) \equiv 0$ per ogni $(x, z) \in U$. Dato che $\partial_x f(Q) = 0 = \partial_z f(Q)$, è immediato che l'equazione del piano tangente sia $y = 0$. (L'unico dubbio può riguardare la scelta delle variabili: dato che stiamo esprimendo la y in funzione di (x, z), l'equazione del piano, usando la formula solita, è:

$$y = g(x_0, z_0) + \nabla g(x_0, z_0) \cdot (x - x_0, z - z_0).$$

Ora, $g(x_0, z_0)$ è la y_0 del punto Q, cioè $y_0 = 0$. Dato che $\nabla g(P) = (0, 0)$, l'equazione del piano si ricava velocemente.)

Esercizio 5. Siano dati

$$f(x,y,z) = x^2 + y^3 z - \frac{xz}{y}, \qquad P = (2,1,4).$$

1. Verificare l'esistenza di una superficie di livello regolare, che si può esprimere come grafico di $z = g(x,y)$, in un intorno del punto dato.
2. Calcolare le derivate parziali di g in $(2,1)$.
3. Calcolare l'equazione del piano tangente alla superficie di livello 0 in P.

Soluzione.

1. Per quanto riguarda la regolarità di f, osserviamo che f è di classe C^∞ al di fuori del piano $y = 0$. Dato che il punto P ha coordinata $y = 1$, la funzione è di classe C^∞ su un intorno sferico di P di raggio 1. Si verifica che $f(P) = 4 + 4 - 8 = 0$. Infine

   $$\nabla f(x,y,z) = \left(2x - \frac{z}{y}, 3y^2 z + \frac{xz}{y^2}, y^3 - \frac{x}{y}\right), \qquad \nabla f(P) = (0, 20, -1).$$

   Si può quindi esprimere y in funzione di (x,z), oppure z in funzione di (x,y). (Scegliamo quest'ultima.)

2. Usiamo le formule

   $$\partial_x g(2,1) = -\frac{\partial_x f(2,1,g(2,1))}{\partial_z f(2,1,g(2,1))} = 0, \qquad \partial_y g(2,1) = -\frac{\partial_y f(2,1,g(2,1))}{\partial_z f(2,1,g(2,1))} = 20.$$

   (In alternativa, si possono ricavare derivando, rispetto a x e rispetto a y, la relazione $f(x,y,g(x,y)) \equiv 0$. Per esempio, derivando rispetto a x:

   $$\partial_x f(x,y,g(x,y)) + \partial_z f(x,y,g(x,y))\partial_x g(x,y) = 0,$$

   da cui si ricava la prima formula.)

3. Il piano ha equazione

   $$\begin{aligned} z &= g(2,1) + \nabla g(2,1) \cdot (x-2, y-1) \\ &= 4 + 0 + 20(y-1) \\ &= 20y - 16. \end{aligned}$$