ANALISI MATEMATICA 2 Prova scritta 09/07/2015	Cognome e Nome firma

1. [5 pt] Scrivere in forma di serie di Maclaurin le funzioni

$$a)\ \sin(x^2), \qquad b)\ \int_0^x \sin(t^2)dt.$$

$a)$ ☐ $b)$ ☐

2. [5 pt] Data la curva

$$\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) = \left(t^2, 0, \frac{t^3}{3}\right),$$

calcolarne la lunghezza ℓ, indicando formula e risultato, e l'ascissa curvilinea $t(s)$

$\ell =$ ☐ $t(s) =$ ☐

3. [5 pt] Sia data la funzione $f(x,y) := 5(x+y)\log(x+y) + \pi$. Tenendo a mente le curve di livello di f, indicare

(a) il dominio $D =$ ☐;

(b) l'insieme dei punti di minimo ☐;

(c) la frontiera del dominio $\partial D =$ ☐;

(d) i punti di estremo relativo in $\overline{D}$: ☐.

4. [5 pt] Sia V il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$V = \left\{1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\right\} \cap \left\{z \geq -\sqrt{x^2 + y^2}\right\},$$

e sia $\mu(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ la sua densità. Calcolare la massa di V, indicando i passaggi salienti. (Precisamente: 1) Indicare le formule utilizzate; 2) Impostare l'integrale, sostituendo tutti i valori numerici alle formule; 3) eseguire il calcolo dell'integrale.)

1)	2)	3)

5. [5 pt] Sia $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 9,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$. Calcolare, indicando i passaggi salienti,

$$\int_\Sigma z \, dS = \boxed{}$$

6. [5 pt] Siano dati $p = (\sqrt{\pi}, \pi/4) \in \mathbb{R}^2$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale che $f(p) = 2$, $\nabla f(p) = (0, 2/\pi)$. Siano $F(x, y) := (x, y, f(x, y))$, $g(u, v, w) := \cos(u^2 - vw)$. Calcolare

$\partial_x F(p) = \boxed{}$, $\partial_x (g(F))(p) = \boxed{}$, $\partial_y (g(F))(p) = \boxed{}$

SOLUZIONI

1.

$$a)\ \sin(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x^2)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+2}$$

$$b) \int_0^x \sin(t^2)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{4n+2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{4n+2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!} x^{4n+3}$$

2. Lunghezza:

$$\ell = \int_0^4 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^4 \sqrt{4t^2 + t^4} dt = \int_0^4 t\sqrt{4+t^2} dt$$
$$= \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(4+t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{1}{3}(20^{\frac{3}{2}} - 8)$$

Ascissa curvilinea:

$$s(t) = \frac{1}{3}((4+t^2)^{\frac{3}{2}} - 8) \qquad \Rightarrow (3s(t)+8)^{\frac{2}{3}} = 4 + t^2$$

$$\Rightarrow t(s) = \left((3s+8)^{\frac{2}{3}} - 4\right)^{\frac{1}{2}}$$

3. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\}$, $\nabla f(x, y) = 5(1 + \log(x + y), 1 + \log(x + y))$. Punti di minimo: $m := \{(x, y) \in D : x + y = e^{-1}\}$. $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}$. Punti di estremo relativo in $\overline{D} : m \cup \partial D$.

4. V si può scrivere in coordinate sferiche, con $\rho \in [1, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, 3\pi/4]$. La densità, in coordinate polari, è $\mu = \rho$. La massa m si ricava da

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \int_1^2 \mu\rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin\varphi \, d\varphi \int_1^2 \rho^3 \, d\rho = 2\pi \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{16-1}{4}\right).$$

5. Sia $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$, Σ è il grafico di $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2}$, per $(x, y) \in D$.

$$\partial_x f(x, y) = -x(9 - x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \partial_y f(x, y) = 0, \qquad \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}} = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$\int_\Sigma z \, dS = \int_D \sqrt{9 - x^2} \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} \, dx \, dy = 3\pi.$$

6.

$$\partial_x F(p) = (1, 0, \partial_x f(p)) = (1, 0, 0), \qquad \partial_y F(p) = (1, 0, \partial_y f(p)) = (0, 1, 2/\pi).$$

$$\nabla(g(F)) = \nabla g(F) DF = \sin(x^2 - yf)(-2x, f, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \partial_x f & \partial_y f \end{pmatrix}$$
$$= \sin(x^2 - yf)(-2x + y\partial_x f, f + y\partial_y f)$$

$$p = (\sqrt{\pi}, \pi/4), \quad f(p) = 2, \quad \nabla f(p) = (0, 2/\pi) \quad \Rightarrow \quad \nabla\{g(F)\}(p) = \left(-2\sqrt{\pi}, \frac{5}{2}\right)$$