ANALISI MATEMATICA 2 Esercitazione 12/06/2015	Cognome e Nome	firma

Quando lo spazio lasciato a disposizione lo consente, riportare i passaggi salienti.

1. [4 pt] Data la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n\,3^n \log(n)}$, determinarne il raggio di convergenza $R = \boxed{}$. Detto I l'intervallo di convergenza, determinare l'insieme $I \cap (-\infty, 2] = \boxed{}$.

2. [4 pt] Data la curva $(t, \cos(t+\pi/2), \sin(t+\pi/2)), \quad t \in \mathbb{R}$,
   - determinare la retta tangente a γ nel punto $P = \gamma(\pi)$
   - calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,\, 1 + z^3 e^{yz},\, e^{yz}(2z + yz^2) - \sin(z))$ lungo γ, da $A = \gamma(0)$ a $B = \gamma(4\pi)$, specificando i passaggi salienti:

3. [5 pt] Trovare i punti di massimo e di minimo della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 2x + y + 12, \qquad \text{nell'insieme} \qquad G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 - xy + \frac{3}{4}y^2 \leq 4\right\}.$$

4. [8 pt] Siano

- $Q := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0,\pi/2],\ y \in [0,\pi/2],\ z = 0\}$,
- Σ la piramide avente base Q e vertice $P = (\pi/4, \pi/4, 1)$,
- $F(x,y,z) := \big(\sin(x+z)\sin(y), \cos(x+z)\cos(y), \log(|xy|+e)\big)$,

- Calcolare il flusso di F uscente dalla superficie *totale* di Σ

- Calcolare il flusso del *rotore* di F uscente dalla superficie *totale* di Σ

- Calcolare il flusso del *rotore* di F attraverso Q, diretto verso l'alto.

5. [4 pt] Sia dato $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ definito da $\Sigma = \{x^2+y^2+z^2 = 9\} \cap \{z \geq -\frac{3}{2}\}$. Sia

$$f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Calcolare l'integrale superficiale $\displaystyle\int_\Sigma f$

SOLUZIONI

1. Poniamo $y = (x-2)/3$ e studiamo la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{y^n}{n\,\log(n)}$. Usiamo il criterio del rapporto (si può usare anche quello della radice)
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\log(n+1)}{n\log(n)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\log(n+1)}{\log(n)}\right| = 1.$$
Quindi, il raggio di convergenza della serie $a_n y^n$ è 1. Per il criterio di Leibniz, la serie converge in $y = -1$. In conclusione, il raggio di convergenza è 3 e il punto $x = -1$ appartiene all'intervallo di convergenza, e quindi
$$I \cap (-\infty, 2] = [-1, 2].$$

2. $\gamma(t) = (t, \cos(t+\pi/2), \sin(t+\pi/2)) = (t, -\sin(t), \cos(t)), \quad t \in \mathbb{R}$,
$$\gamma'(t) = (1, -\cos(t), -\sin(t)), \qquad \gamma(\pi) = (\pi, 0, -1), \quad \gamma'(\pi) = (1, 1, 0).$$
Retta in forma parametrica, per un qualunque $t_0 \in \mathbb{R}$:
$$r(t) = (t-t_0)\gamma'(\pi) + \gamma(\pi), \qquad \text{oppure, per } t_0 = 0, \qquad r(t) = (t+\pi, t, -1).$$
Potenziale:
$$\varphi = \frac{1}{2}x^2 + y + z^2 e^{zy} + \cos(z)$$
Lavoro:
$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\tau = \varphi(\gamma(4\pi)) - \varphi(\gamma(0)) = \frac{1}{2}(4\pi)^2 - 0 = 8\pi^2.$$

3. $\nabla f(x,y) = \big(2, 1\big)$ quindi non ci sono punti critici interni a G. Per studiare il comportamento sulla frontiera di G usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:
$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 2 &= \lambda(6x - y) \\ 1 &= \lambda\big(\frac{3}{2}y - x\big) \\ g(x,y) &= 0 \end{cases}$$
dove $g(x,y) = 3x^2 - xy + \frac{3}{4}y^2 - 4$. Troviamo
$$3x - \frac{y}{2} = \frac{3}{2}y - x \quad \Rightarrow \quad 2x = y,$$
e sostituendo nell'ultima equazione
$$3x^2 - 2x^2 + 3x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1, \quad y = \pm 2.$$
Dato che i coefficienti di f son positivi, $(1, 2)$ è un massimo assoluto e $(-1, -2)$ è un minimo assoluto.

4.
   - Per calcolare il flusso di F uscente dalla superficie di Σ utilizziamo il teorema di Gauss:
$$\int_{\partial\Sigma} F\cdot n = \int_\Sigma \operatorname{div} F,$$
   dove n è il versore normale entrante.
$$\begin{aligned}\operatorname{div} F &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ &= \cos(x+z)\sin(y) - \cos(x+z)\sin(y) + 0 = 0.\end{aligned}$$

- Il flusso del rotore attraverso la superficie totale è zero, come conseguenza del teorema della divergenza o di quello di Stokes. Per esempio, il teorema della divergenza ci dice che
$$\int_{\partial\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n = \int_{\Sigma} \operatorname{div}(\operatorname{rot} F),$$
e la divergenza di un rotore è sempre nulla.

- Calcolare il flusso del *rotore* di F attraverso Q, diretto verso l'alto: Dato che $n = (0,0,1)$,
$$\begin{aligned}\int_Q \operatorname{rot} F \cdot n = \int_Q \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\Big|_{z=0} dx\,dy &= -2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(y)\,dx\,dy \\ &= -2\left(\int_0^{\pi/2}\sin(x)dx\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos(y)\,dy\right) \\ &= 2\,(\cos(\pi/2)-1)\sin(\pi/2) = -2.\end{aligned}$$

Alternativamente, grazie al teorema di Stokes (o di Green), si poteva calcolare $\int_{\partial Q} F \cdot \tau$ sui lati del quadrato Q, ottenendo
$$\begin{aligned}\int_Q \operatorname{rot} F \cdot n &= \int_0^{\pi/2} F(x,0,0)\cdot(1,0,0)\,dx + \int_0^{\pi/2} F(\pi/2,y,0)\cdot(0,1,0)\,dy \\ &\quad + \int_0^{\pi/2} F(x,\pi/2,0)\cdot(-1,0,0)\,dx + \int_0^{\ell} F(0,y,0)\cdot(0,-1,0)\,dy \\ &= 0 + \cos(\pi/2)\int_0^{\pi/2}\cos(y)\,dy - \sin(\pi/2)\int_0^{\pi/2}\sin(x)\,dx - \int_0^{\pi/2}\cos(y)\,dy,\end{aligned}$$
che dà, naturalmente, lo stesso risultato.

5. Usando le coordinate sferiche standard, la superficie Σ si può descrivere come
$$\sigma(\varphi,\theta) = \big(R\sin\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi\big), \qquad \|\nu(\varphi,\theta)\| = R^2\sin\varphi,$$
con $\varphi \in [0, 2\pi/3]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $R = 3$. Il valore di $2\pi/3$ per φ si ottiene dalla z:
$$3\cos\varphi = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = -\frac{1}{2}.$$
Calcoliamo quindi
$$\begin{aligned}\int_\Sigma f &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/3} f(\sigma(\varphi,\theta))\|\nu(\varphi,\theta)\|\,d\varphi\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/3} \frac{(3\sin\varphi\cos\theta)^2 + (3\sin\varphi\sin\theta)^2}{9} 9\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi/3} 9(\sin\varphi)^2\,\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta \\ &= 18\pi\int_0^{2\pi/3}(1-(\cos\varphi)^2)\sin\varphi\,d\varphi \\ &= 18\pi\int_0^{2\pi/3}\sin\varphi - \sin\varphi(\cos\varphi)^2\,d\varphi \\ &= 18\pi\Big[-\cos\varphi + \frac{(\cos\varphi)^3}{3}\Big]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi/3} \\ &= 18\pi\left(-\cos(2\pi/3) + \frac{1}{3}(\cos(2\pi/3))^3 - \frac{2}{3}\right) = -\frac{15}{4}\pi.\end{aligned}$$