Preferenza per la prova orale:

☐ 16-19 giugno ☐ 22-25 giugno

ANALISI MATEMATICA 2 Prova scritta 15/06/2015	Cognome e Nome firma

Quando lo spazio lasciato a disposizione lo consente, riportare i passaggi salienti.

1. [5 pt] Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{nx}}{(2n+1)!}$ converge?

   Calcolare, se esiste, il valore della somma in $x = 2$

2. [5 pt] Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 \le 2y \le 1 + |x|\}$, $\gamma = \partial D$, orientata in senso antiorario. Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F}(x, y) = (4y^2(e^x - e^{-x}) - 3y, 8(e^x + e^{-x})y)$ lungo γ.

   Sia $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matrice che rappresenta la rotazione di $\pi/2$ in senso *orario*. Calcolare

   $\mathrm{div}(A\mathbf{F}) =$

3. [5 pt] Sia $f(x, y) := (2x-4)^2 + 4y^2$. Sia $T \subset \mathbb{R}^2$ la regione di piano delimitata dal triangolo di vertici $A = (-1, 0)$, $B = (0, 2)$, $C = (2, 0)$. Determinare il massimo e il minimo assoluto di f su T.

4. [5 pt] Sia $f(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x + \log(1 + y^2)\right)$, scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico di f nel punto $P = (1, 0, \sqrt{2}/2)$ e indicarne il versore normale rivolto verso l'alto.

5. [5 pt] Data la funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

calcolare, se esistono, i seguenti oggetti (se non esistono, scrivere: “N.E.”)

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \boxed{}$;

ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)}{x} = \boxed{}$;

iii) $\nabla f(0,0) = \boxed{}$;

iv) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \boxed{}$;

v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) = \boxed{}$.

6. [5 pt] Calcolare, indicando i passaggi salienti, il volume del solido di rotazione ottenuto facendo ruotare attorno all’asse z la curva parametrizzata da

$$\gamma(t) = (2\cosh(t), 0, t), \qquad t \in [-1,1].$$

SOLUZIONI

1. Poniamo $y = 2^x$ e studiamo la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{(2n+1)!}$. Per il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = 0.$$

Quindi la serie di $a_n y^n$ ha raggio di convergenza $R = +\infty$ e la serie originale converge $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Per la somma osserviamo

$$y^n = (\sqrt{y})^{2n} = \frac{1}{\sqrt{y}}(\sqrt{y})^{2n+1},$$

quindi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{nx}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2^{x/2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^{x/2})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2^{x/2}} \sinh(2^{x/2}).$$

2. Per il Teorema di Green

$$\begin{aligned}\int_{\partial D^+} \mathbf{F}\cdot\tau &= \int_D \{\partial_x F_2 - \partial_y F_1\}\, dx\, dy = \int_D \Big\{8(e^x - e^{-x})y - 8y(e^x - e^{-x}) + 3\Big\}\, dx\, dy \\ &= \int_D 3\, dx\, dy = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{(1+|x|)/2} 3\, dy\, dx = 2\int_0^1 \int_{x^2}^{(1+x)/2} 3\, dy\, dx \\ &= 6\int_0^1 \frac{1+x}{2} - x^2\, dx = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Riguardo al secondo punto

$$A\mathbf{F} = (F_2, -F_1) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}(A\mathbf{F}) = \partial_x F_2 - \partial_y F_1 = 3.$$

3. La funzione data è il paraboloide centrato in $C = (2, 0)$. Dato che le curve di livello sono circonferenze centrate in C, f ha minimo assoluto (=0) in C e massimo assoluto nel vertice più lontano, cioè in A, con valore $f(A) = 4(1+2)^2 = 36$.

4. Calcoliamo

$$\partial_x f = -\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}x + \log(1+y^2)\right), \qquad \partial_y f = -\frac{2y}{1+y^2}\sin\left(\frac{\pi}{4}x + \log(1+y^2)\right),$$

quindi $\nabla f(1,0) = (-\pi\sqrt{2}/8, 0)$,

$$z = f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0) = \sqrt{2}/2 - \pi\sqrt{2}/8(x-1),$$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}}(-\partial_x f, -\partial_y f, 1) = \left(\frac{32}{\pi^2+32}\right)^{1/2}\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{8}, 0, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi^2+32}}\left(\pi, 0, 4\sqrt{2}\right).$$

5. In coordinate polari,

$$f = \rho\cos^2(\theta)\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \text{i)} = 0;$$

$f(x,0) = f(0,y) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad$ ii) $= 0$ e $\nabla f(0,0) = (0,0)$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = 2\cos(\theta)\sin^3(\theta), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

quindi $\partial_x f$ e $\partial_y f$ non hanno limite per $(x,y) \to (0,0)$.

6. Integro per strati: ad altezza z la sezione $\Omega(z)$ di solido è un disco di raggio $2\cosh(z)$, con area $|\Omega(z)| = 4\pi\cosh^2(z)$. Il volume si ottiene da

$$\begin{aligned} V &= 4\pi \int_{-1}^{1} \cosh^2(z)\, dz = 4\pi \int_{-1}^{1} \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 dz \\ &= \pi \int_{-1}^{1} \left\{e^{2z} + e^{-2z} + 2\right\} dz = \pi \left[\frac{e^{2z}}{2} - \frac{e^{-2z}}{2} + 2z\right]_{-1}^{1} = \pi(2\sinh(2) + 4). \end{aligned}$$