ANALISI MATEMATICA 2 Prova scritta 26/06/2015	Cognome e Nome firma

1. [5 pt] Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{n} \cos(n\pi)(x-4)^n$ converge?

   Sia f la somma della serie, calcolare $\displaystyle\frac{d^4 f}{dx^4}(4)$

2. [5 pt] Calcolare il lavoro del campo $F(x, y, z) = (\frac{z}{4} + 2y, 2x, \frac{x}{4} - \sin(z))$ lungo la curva $\gamma : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, specificando i passaggi salienti.

3. [5 pt] Data la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   calcolare, mediante la definizione, la derivata direzionale di f in $(0, 0)$ rispetto ai versori

   (a) $v_1 = (-1, 0)$; (b) $v_2 = (0, 1)$; (c) $v_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

   (d) Calcolare nuovamente $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial v_3}(0, 0)$, per mezzo della formula del gradiente .

4. [5 pt] Calcolare l'area della superficie definita da

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z = 2xy+12\right\}\cap\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 1/4\right\}.$$

(Precisamente: 1) Indicare le formule utilizzate; 2) Impostare l'integrale, sostituendo tutti i valori numerici alle formule; 3) eseguire il calcolo dell'integrale.)

1)

2)

3)

5. [5 pt] Siano

$$F = (4y^3z + x, e^{z^2} + x - y, 2\cos(x^2+y^2)),$$

$g(x,y) = -\sqrt{9-x^2-y^2}$, Σ =graf(g). Calcolare il flusso di F attraverso Σ, indicando i passaggi salienti.

6. [5 pt] Sia C il cilindro che, fra tutti quelli contenuti nella sfera di raggio R, ha volume massimo. Calcolare il volume di C indicando i passaggi salienti. (Impostare il problema, determinando la funzione da massimizzare e l'insieme su cui studiarla (e.g., usando le coordinate sferiche), quindi risolvere il problema di massimo. Nota: è richiesto solo il volume massimo, non il cilindro che lo realizza.)

SOLUZIONI

1. Dato che $\cos(n\pi) = (-1)^n$, per il criterio della radice,

$$R^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n/n} = \sqrt{2}.$$

In $x = 4 - 1/\sqrt{2}$ e in $x = 4 + 1/\sqrt{2}$ la serie è, rispettivamente,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

quindi l'insieme di convergenza è $]4 - 1/\sqrt{2}, 4 + 1/\sqrt{2}]$. Sfruttando $f^{(k)}(4) = a_k k!$, ottengo

$$\frac{d^4 f}{dx^4}(4) = \frac{(\sqrt{2})^4}{4} \cos(4\pi)4! = 4 \cdot 6 = 24.$$

2. Il campo F ammette il potenziale $U(x, y, z) = \frac{xz}{4} + 2xy + \cos(z)$, per cui

$$\int_\gamma F \cdot \tau = U(\gamma(6\pi)) - U(\gamma(0)) = U(1, 0, 6\pi) - U(1, 0, 0) = \frac{6}{4}\pi + 1 - 1 = \frac{3}{2}\pi.$$

3. Denotiamo $v = (\cos\theta, \sin\theta)$,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(t\cos\theta)^2 t\sin\theta}{((t\cos\theta)^2 + (t\sin\theta)^2)\, t} = \cos^2\theta \sin\theta,$$

da cui

$$\frac{\partial f}{\partial v_1}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial v_2}(0, 0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial v_3}(0, 0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}, \qquad \nabla f(0, 0) \cdot v_3 = 0.$$

(La funzione non è differenziabile, per cui la formula del gradiente non è valida.)

4. La superficie è il grafico di $f(x, y) = 2xy + b$ per $(x, y) \in D := \{x^2 + y^2 \le 1/4\}$.

$$\begin{aligned} A &= \int_D \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2}\, dx\, dy = \int_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dx\, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \rho\sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho\, d\theta = 2\pi \left[\frac{1}{12}(1 + 4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{12}\left((1 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{\pi}{6}\left(2\sqrt{2} - 1\right). \end{aligned}$$

5. Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 9, g(x, y) \le z \le 0\}$, cioè il volume occupato dalla mezza sfera con $z \le 0$ e $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 9, z = 0\}$, in modo che $\partial V = \Sigma \cup B$. Per il teorema di Gauss

$$0 = \int_V \operatorname{div} F = \int_{\partial V} F \cdot n = \int_B F \cdot n + \int_\Sigma F \cdot n.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_\Sigma F \cdot n = -\int_B F \cdot n &= -\int_B 2\cos(x^2 + y^2)\, dx\, dy \\ &= -\int_0^{2\pi} \int_0^3 2\cos(\rho^2)\rho\, d\rho\, d\theta = -2\pi\Big[\sin\left(\rho^2\right)\Big]_0^3 = -2\pi \sin 9. \end{aligned}$$

6. Le coordinate sferiche di un punto sulla sfera di raggio R sono

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\sin\varphi, \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \\ z = R\cos\varphi. \end{cases}$$

Il volume di un cilindro inscritto nella sfera è quindi

$$\begin{aligned} V &= (\text{area di base}) \cdot (\text{altezza}) = \pi\left(x^2 + y^2\right) 2z \\ &= \pi R^2 (\sin\varphi)^2 2R\cos\varphi = \pi 2R^3(1 - \cos^2\varphi)\cos\varphi. \end{aligned}$$

Il volume massimo è

$$V_{max} = \max_{\varphi\in[0,\pi]} 2\pi R^3(1-\cos^2\varphi)\cos\varphi = \max_{\xi\in[0,1]} 2\pi R^3(1-\xi^2)\xi = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}},$$

dove abbiamo usato

$$0 = \frac{d}{d\xi}\{\xi - \xi^3\} = 1 - 3\xi^2 \quad \Rightarrow \quad \xi_m = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad (1-\xi_m^2)\xi_m = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Alternativa: scelgo un punto sul piano $y = 0$, funzione volume $f(x,z) = \pi x^2 2z$, vincolo $g(x,z) = x^2 + z^2 = R^2$. Metodo parametrico: massimizzo $2\pi(R^2 - z^2)z$ su $z \in (0, R)$. Calcolando la derivata prima, si ricava $3z^2 = R^2$, sostituendo nella formula del volume si ricava, il risultato di prima.

Alternativa: stesse f e g, con i moltiplicatori di Lagrange.