ANALISI MATEMATICA 2 Esercitazione 09/06/2015	Cognome e Nome firma

Quando lo spazio lasciato a disposizione lo consente (Es. 4,5,6), riportare i passaggi salienti.

1. [5 pt] Data la serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\cos(4/n)-1\right](3x-2)^n$, determinarne il

   raggio di convergenza $\boxed{}$ e l'insieme di convergenza $\boxed{}$

2. [4 pt] Siano $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ e $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ le funzioni definite da

$$f(x,y,z)=\big(xy^3,(z+x)^2,5xyz\big)\,,\qquad g(u,v,w)=\big(e^u\cos(v),\sin(e^w)\big).$$

   Qual è la dimensione della matrice Jacobiana di $h=g\circ f$? $\boxed{}$ Calcolarne la

   prima colonna $\boxed{}$

3. [4 pt] Sia data la regione $R=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:0\le u\le 2\pi,\ 0\le v\le 2\pi,\}$, il punto $P=\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2},\ \sqrt{2}+\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e la superficie $\sigma:R\to\mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(u,v)=\big((2+\cos v)\cos u,(2+\cos v)\sin u,\sin v\big).\qquad \text{Calcolare:}$$

   - I parametri u_0,v_0 tali che $\sigma(u_0,v_0)=P$, $\quad(u_0,v_0)=\boxed{}$
   - il piano tangente a σ nel punto P:

     $\Pi(u,v)=\boxed{}$

4. [4 pt] Alcune compagnie aeree definiscono "bagaglio a mano" un bagaglio la cui somma delle tre dimensioni (larghezza, lunghezza, altezza) non superi i 115 cm. Determinare il bagaglio di massimo volume consentito, specificando i passaggi salienti.

$\boxed{}$

5. [8 pt] Data la funzione $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{1}{4}\big(\log(2x^2+y^2)\big)^2$

- calcolare ∇f:

- Siano $\mathbf{F} = \nabla f$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$, n il versore normale uscente da ∂D e τ il versore tangente a ∂D, orientato in senso antiorario. Calcolare

$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot n$:

$\int_{\partial D^+} \mathbf{F} \cdot \tau$:

6. [5 pt] Calcolare, indicando i passaggi salienti, $\iiint_V \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz$, dove

$$V = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq z \leq 2 + \sqrt{x^2+y^2}, \text{ e } x \leq 0\Big\}.$$

SOLUZIONI

1. Poniamo $y = 3x - 2$. Applichiamo lo sviluppo di Taylor
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3), \quad \text{per } x \to 0,$$
al nostro caso:
$$1 - \cos(4/n) \sim \frac{8}{n^2}, \qquad 1 - \cos(4/n+1) \sim \frac{8}{(n+1)^2},$$
e usiamo il criterio del rapporto
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\cos(4/(n+1)) - 1}{\cos(4/n) - 1}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$
Quindi, il raggio di convergenza per la serie di $a_n y^n$ è 1. Dato che la serie di termine generale $(-1)^n/n^2$ converge assolutamente, concludiamo che l'insieme di convergenza è dato dall'intervallo $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

2. La funzione composta
$$h(x, y, z) = g \circ f(x, y, z) = \left(e^{xy^3} \cos(x+z)^2, \sin(e^{5xyz})\right),$$
è definita da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$, quindi la matrice Jacobiana ha dimensione 2×3. La prima colonna contiene le derivate parziali rispetto a x delle due componenti, e si può scrivere (in orizzontale, per comodità)
$$\left(y^3 e^{xy^3} \cos(z+x)^2 - 2e^{xy^3} \sin(z+x)^2(z+x)\ ,\ 5yze^{5xyz} \cos(e^{5xyz})\right).$$

3. $P = \sigma(\pi/4, \pi/4)$. Per il piano tangente a σ nel punto P calcoliamo
$$\begin{aligned}\partial_u\sigma(u, v) &= \big(-(2 + \cos v)\sin u,\ (2 + \cos v)\cos u,\ 0\big)\\ \partial_v\sigma(u, v) &= \big(-\sin v \cos u,\ -\sin v \sin u,\ \cos v\big),\end{aligned}$$
e usiamo la formula
$$\begin{aligned}\Pi(u, v) &= \sigma(\pi/4, \pi/4) + \partial_u\sigma(\pi/4, \pi/4)(u - \pi/4) + \partial_v\sigma(\pi/4, \pi/4)(v - \pi/4)\\ &= P + (-\sqrt{2} - 1/2,\ \sqrt{2} + 1/2, 0)(u - \pi/4) + (-1/2,\ -1/2, \sqrt{2}/2)(v - \pi/4).\end{aligned}$$

4. Sia ℓ la somma delle misure, il problema equivale a massimizzare la funzione $f = xyz$ nel sottoinsieme
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x, y, z \quad \text{e} \quad x + y + z \le \ell\}.$$
Dato che la funzione è C^1 e l'unico punto stazionario è l'origine, che chiaramente non è un massimo, si tratta di cercare un massimo su $\partial\Omega$. L'unico lato dove f non è zero è l'insieme
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x, y, z \quad \text{e} \quad x + y + z = \ell\}.$$
Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Sia $g = x + y + z - \ell$, dobbiamo risolvere il sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$ con $g = 0$, cioè
$$\begin{cases} yz = \lambda, \\ xz = \lambda, \\ xy = \lambda, \\ x + y + z = \ell. \end{cases}$$
Un rapido conto rivela l'unica soluzione (con variabili positive) $x = y = z = \frac{\ell}{3}$.

5. Data $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\quad f(x,y)=\dfrac{1}{4}\big(\log(2x^2+y^2)\big)^2$

- $\nabla f=\dfrac{1}{2}\dfrac{\log(2x^2+y^2)}{2x^2+y^2}\,(4x,2y)=\dfrac{\log(2x^2+y^2)}{2x^2+y^2}\,(2x,y)$
- Flusso. Parametrizziamo ∂D come $\gamma_r(t)=r(\cos(t),\sin(t))$, $t\in[0,2\pi]$, con $r=1$ per la circonferenza interna e $r=2$ per quella esterna e, per semplicità di notazione, poniamo $\phi(t)=2x^2+y^2=2\cos^2(t)+\sin^2(t)$. Calcoliamo anche (per $r=1,2$)

$$\gamma_r'(t)=r(-\sin(t),\cos(t)),\qquad n_r(t)=(-1)^r n(t)\|\gamma_r'(t)\|=r(-1)^r(\cos(t),\sin(t)).$$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D}\mathbf{F}\cdot n&=\int_{\gamma_2}\nabla f\cdot n_2+\int_{\gamma_1}\nabla f\cdot n_1\\
&=\int_0^{2\pi}\frac{\log(4\phi(t))}{4\phi(t)}2(2\cos(t),\sin(t))\cdot n_2(t)\,dt\\
&\qquad+\int_0^{2\pi}\frac{\log(\phi(t))}{\phi(t)}(\cos(t),\sin(t))\cdot n_1(t)\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}\frac{\log(4\phi(t))}{4\phi(t)}4\phi(t)\,dt-\int_0^{2\pi}\frac{\log(\phi(t))}{\phi(t)}\phi(t)\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}\log(4\phi(t))-\log(\phi(t))\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}\log(4)+\log(\phi(t))-\log(\phi(t))\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}\log(4)\,dt=2\pi\log 4.
\end{aligned}$$

- Lavoro: (teorema di Green)

$$\int_{\partial D^+}\mathbf{F}\cdot\tau=\int_D\operatorname{rot}\mathbf{F}=\int_D\operatorname{rot}\nabla f=0.$$

6. Integro per fili. Per ricavare l'insieme di x e y pongo $x^2+y^2=2+\sqrt{x^2+y^2}$. In pratica, risolvo $\rho^2=2+\rho$ come equazione di secondo grado:

$$\rho^2-\rho-2=0\quad\Rightarrow\quad\rho=\frac{1+\sqrt{1+8}}{2}=2.$$

Sia quindi $D=\{x^2+y^2\le 4\}\cap\{x\le 0\}$.

$$\begin{aligned}
I&=\int_D\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\int_{x^2+y^2}^{2+\sqrt{x^2+y^2}}1\,dz\,dx\,dy\\
&=\int_D\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big(2+\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)\Big)dx\,dy\\
&=\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos(\theta)d\theta\int_0^2(2+\rho-\rho^2)\rho\,d\rho\\
&=-2\Big[\rho^2+\frac{\rho^3}{3}-\frac{\rho^4}{4}\Big]_0^2=-2(4+\frac{8}{3}-4)=-\frac{16}{3}.
\end{aligned}$$