ANALISI MATEMATICA 2 Prova scritta 18/09/2015	Cognome e Nome	firma

1. [4 pt] Per $\alpha = 2$, si consideri la serie di potenze $\sum_{n=2}^{+\infty} e^n \log(n^\alpha)(x-3)^n$. Determinare

   il raggio di convergenza $\boxed{}$ $\quad s^{(4)}(3) = \boxed{}$

   (La notazione $s^{(j)}(y)$ indica la derivata j-esima della somma della serie nel punto y.)

2. [4 pt] Calcolare il lavoro del campo $F(x, y, z) = (2y \sin(2xy), 2x \sin(2xy), 5)$ lungo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t\cos(t), t\sin(t))$. Indicare i passaggi salienti.

3. [6 pt] Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una sfera di centro $C = (0, 1, 0)$, raggio 2 e densità costante μ. Impostare l'integrale triplo per calcolarne la massa, <u>utilizzando due metodi diversi</u>. Indicare esplicitamente estremi di integrazione, funzione integranda, variabili di integrazione. Non è richiesto di svolgere il calcolo dell'integrale.

   1)

   2)

4. [5 pt] Classificare i punti stazionari di $f(x,y) = x^2 y e^{-(x^2+y^2)}$, specificando quali punti sono di estremo relativo o assoluto, quali di estremo stretto. Non è richiesto di presentare il procedimento.

5. [7 pt] Sia Σ la superficie cartesiana definita da

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z = R - \sqrt{x^2+y^2} \right\}.$$

(a) Calcolare il versore normale alla superficie $\mathbf{n}$, diretto verso l'alto;

(b) Per quali punti di Σ esiste $\mathbf{n}$?

(c) Calcolare l'area della superficie, indicando i passaggi salienti;

(d) Sia $F(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z \right)$. Studiarne il dominio e calcolare il flusso del rotore di F attraverso Σ, nella direzione specificata in (a), indicando i passaggi.

(a)

(b)

(c)

(d)

6. [4 pt] Siano dati $p = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ e $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale che $\nabla f(p) = (-1,2)$. Siano inoltre $g(x,y) := (x^2 - y^2, xy)$, $h := f(g)$, $v = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$. Calcolare

$$\partial_x h(1,1) = \boxed{}, \qquad \partial_y h(1,1) = \boxed{}, \qquad \frac{\partial h}{\partial v}(1,1) = \boxed{}$$

SOLUZIONI

1. Per il criterio della radice
$$\lim_{n\to+\infty} (e^n \log(n^\alpha))^{\frac{1}{n}} = e.$$
Quindi $R = 1/e$. Per il calcolo del limite del logaritmo si può notare, per esempio, che per $n \geq 3$
$$\alpha \leq \alpha \log(n) = \log(n^\alpha) \leq \alpha n, \qquad \lim_{n\to+\infty} (\alpha)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} (\alpha n)^{\frac{1}{n}} = 1.$$
Riguardo al secondo punto, sappiamo che $s^{(k)}(x_0) = a_k k!$, quindi
$$s^{(4)}(3) = a_4 4! = 24\alpha e^4 \log(4).$$

2. Il campo F ammette il potenziale $\phi(x,y,z) = -\cos(2xy) + 5z$. Il lavoro L si può quindi calcolare come
$$L = \phi(\gamma(2\pi)) - \phi(\gamma(0)) = -\cos(8\pi^2) + 1.$$

3. L'equazione di S è
$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = R^2.$$
Integrazione per fili :
$$\int_{-R}^{R} \int_{1-\sqrt{R^2-x^2}}^{1+\sqrt{R^2-x^2}} \Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-(y-1)^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-(y-1)^2}} \mu \, dz \Big) dy \, dx.$$
Integrazione per fili (e coordinate polari traslate per il dominio in x, y):
$$\int_0^{2\pi} \int_0^{R} \Big(\int_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} \mu \, dz \Big) \rho \, d\rho \, d\theta.$$
Integrazione per strati e coordinate polari:
$$\int_{-R}^{R} \Big(\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \mu \, \rho \, d\rho \, d\theta \Big) dz,$$
Coordinate sferiche (traslate):
$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \mu \, \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

4. Calcolo le derivate parziali:
$$\partial_x f(x,y) = \big(2xy - 2x^3 y\big) \, e^{-(x^2+y^2)}, \qquad \partial_y f(x,y) = \big(x^2 - 2x^2y^2\big) \, e^{-(x^2+y^2)},$$
$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) = 0 \; &\Leftrightarrow \; 2xy(1-x^2) \; \Leftrightarrow \; x = 0, \text{ or } y = 0, \text{ or } x = \pm 1, \\ \partial_y f(x,y) = 0 \; &\Leftrightarrow \; x^2(1-2y^2) \; \Leftrightarrow \; x = 0, \text{ or } y = \pm 1/\sqrt{2}. \end{aligned}$$
Dal segno della funzione (i.e., $f(x,y) = 0$ se $x = 0$ oppure $y = 0$, $f(x,y) > 0$ se $x \neq 0$ e $y > 0$), si ricava
$$\begin{aligned} (0,y), y > 0 &: \text{punti di minimo relativo}, \\ (0,y), y < 0 &: \text{punti di massimo relativo}, \\ (0,0) &: \text{punto di flesso}, \\ (\pm 1, 1/\sqrt{2}) &: \text{punti di massimo assoluto stretto}, \\ (\pm 1, -1/\sqrt{2}) &: \text{punti di minimo assoluto stretto}. \end{aligned}$$

5. Definisco $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $f(x,y) = R - \rho$ (un cono con il vertice rivolto verso l'alto). Per soddisfare $z \geq 0$, il dominio di f deve essere $D = \{\rho \leq R\} = \{x^2+y^2 \leq R^2\}$.

   (a)
$$\mathbf{n} = \frac{(-\partial_x f, -\partial_y f, 1)}{\sqrt{1+\|\nabla f\|^2}} = \left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, 1\right)\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

   (b) Dall'espressione di $\mathbf{n}$ si vede $\rho \neq 0$ (il versore normale non esiste nel vertice del cono).

   (c) $\text{Area}(\Sigma) = \int_\Sigma 1\, dS = \int_D \sqrt{1+\|\nabla f\|^2}\, dx\, dy = \int_D \sqrt{2}\, dx\, dy = \sqrt{2}\text{Area}(D) = \sqrt{2}\pi R^2$

   (d) Dato che il dominio di F è $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z)\}$, non posso applicare il teorema di Stokes. Un calcolo immediato mostra che rot $F = 0$, e quindi il flusso è 0.

6.
$$\nabla h(1,1) = \nabla f(g(1,1)) Jg(1,1) = (-1,2)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (0,4).$$
$$\frac{\partial h}{\partial v}(1,1) = \nabla h(1,1)\cdot v = 0 + \frac{8}{\sqrt{5}}.$$