FACOLTÀ DI INGEGNERIA. ESAME DI ANALISI MATEMATICA II.
Corsi di Laurea in Bioingegneria, Ingegneria Elettronica, Ingegneria Informatica.
A.A. 2014/2015. Docente: M. Veneroni

PROGRAMMA PER LA PROVA ORALE COMPLETA

Premessa. Oltre al programma indicato dettagliatamente nel seguito, per il superamento dell'esame è ritenuta irrinunciabile la conoscenza dei necessari prerequisiti, in particolare dei contenuti dei corsi di Analisi Matematica 1 e di Geometria e Algebra richiamati espressamente dal programma di Analisi Matematica 2.

Per comodità degli studenti, nel seguito si riporta il riferimento al libro di testo consigliato (M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, Analisi Matematica 2, Zanichelli, Bologna, 2009).

1. **Serie di funzioni e di potenze (Capitolo 2, §7.1, 7.2).** Definizione di serie di funzioni. Convergenza puntuale e totale. Teorema di continuità della somma. Teorema di derivabilità termine a termine. Teorema di integrabilità termine a termine. Serie di potenze; centro e coefficienti della serie; raggio di convergenza. Criterio del rapporto e criterio della radice. Proprietà delle serie di potenze. Teorema di Abel. Serie di MacLaurin, serie di Taylor, funzioni analitiche. Sviluppi notevoli di e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\arctan x$, $\log(1+x)$, $\sinh x$, $\cosh x$ con dimostrazione. Condizione sufficiente per l'analiticità. Espressione dei coefficienti di una serie di potenze in funzione della somma con dimostrazione. Serie binomiale.

2. **Funzioni tra spazi euclidei (Capitolo 3, §1 − 3).** Funzione reale (o scalare) di n variabili reali, funzione vettoriale di n variabili reali. Dominio; grafico; insieme di livello. Intorno sferico di un punto in $\mathbb{R}^n$; intorno di ∞. Limiti e continuità di funzioni di n variabili. Punto interno, esterno, di frontiera. Insieme aperto, chiuso, limitato, connesso. Teorema di Weierstrass.

3. **Calcolo differenziale per funzioni scalari (Capitolo 3, §4 − 6).** Derivate parziali. Gradiente. Differenziabilità in un punto. Dimostrazione che la differenziabilità implica la derivabilità e la continuità. Formula di linearizzazione. Iperpiano tangente. Differenziale. Teorema del differenziale totale. Classe $C^1(A)$, con A aperto di $\mathbb{R}^n$. Derivata direzionale. Formula del gradiente con dimostrazione. Teorema di derivazione delle funzioni composte. Teorema di Lagrange con dimostrazione. Derivate parziali di ordine superiore. Teorema di Schwarz. Matrice hessiana. Differenziale secondo. Classe $C^2(A)$. Formula di Taylor del secondo ordine con resto in forma di Peano. Ottimizzazione: definizione di punto di massimo (minimo) relativo/assoluto/stretto; punto stazionario. Forma quadratica definita positiva, negativa; forma quadratica semidefinita positiva, negativa; forma quadratica indefinita. Criterio degli

autovalori. Criterio dei minori incapsulati. Punto di sella. Teorema di Fermat con dimostrazione. Classificazione dei punti critici tramite la matrice hessiana con dimostrazione.

4. **Curve in $\mathbb{R}^m$ (Capitolo 2, §1 – 5).** Arco di curva continua, sostegno della curva; curva semplice, chiusa. Parametrizzazioni di un segmento, di una circonferenza, di un ellisse; curva in $\mathbb{R}^2$ grafico di una funzione, curva in $\mathbb{R}^2$ in forma polare. Curva regolare, regolare a tratti. Vettore tangente. Lunghezza di un arco regolare. Curve equivalenti e cambiamenti di parametrizzazione. Ascissa curvilinea. Punto regolare di una curva di livello e sua proprietà con dimostrazione. Integrale curvilineo di prima specie e suo significato geometrico e fisico. Invarianza dell'integrale di prima specie per parametrizzazioni equivalenti e cambio di orientamento con dimostrazione. Massa, baricentro, momento d'inerzia.

5. **Funzioni vettoriali (Capitolo 4, §1, 2).** Limiti, continuità e differenziabilità per una funzione vettoriale di più variabili reali. Matrice Jacobiana e formula di linearizzazione. Differenziale. Teorema di derivazione delle funzioni composte. Jacobiana della funzione inversa con dimostrazione.

6. **Superfici in $\mathbb{R}^3$ (Capitolo 4, §1, 3).** Definizione di superficie, sostegno. Superficie cartesiana. Superficie di rotazione. Superficie regolare. Piano tangente, vettore normale; proprietà di una superficie di livello in un punto regolare con dimostrazione.

7. **Applicazioni del calcolo differenziale (Capitolo 3, §8. Capitolo 4, §6.1, 6.2).** Funzioni implicite - Teorema di Dini, esistenza e continuità della funzione implicita. Derivabilità della funzione implicita con dimostrazione. Retta tangente ad una curva. Estensione a più variabili. Piano tangente ad una superficie. Teorema di Dini per sistemi. Estremi vincolati. Definizione di punto di estremo vincolato. Metodo parametrico (vincolo esplicitabile). Metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Condizione necessaria (con dimostrazione) e condizione sufficiente relativa agli spostamenti tangenziali nel caso di vincolo scalare. Funzione Lagrangiana. Moltiplicatori di Lagrange nel caso di m vincoli.

8. **Calcolo integrale in più variabili (Capitolo 5, §1 e §3. Capitolo 6, §3).** Somme di Cauchy-Riemann di una funzione limitata in un rettangolo. Funzione integrabile secondo Riemann in un rettangolo. Integrale doppio e suo significato geometrico. Formule di riduzione su rettangoli, con dimostrazione per funzioni continue. Esempio di funzione non integrabile. Definizione di funzione integrabile in un insieme limitato. Insieme y-semplice, x-semplice, regolare. Insieme misurabile e sua misura. Esempio di insieme non misurabile. Caratterizzazione degli insiemi di misura nulla. Teorema di integrabilità delle funzioni discontinue su un insieme di misura nulla. Formule di riduzione su insiemi semplici e significato geometrico. Proprietà dell'integrale doppio. Cambio di variabili negli integrali doppi. Coordinate polari. Cenni alla costruzione dell'integrale triplo.

Insieme misurabile e sua misura. Integrazione per fili e integrazione per strati. Cambi di variabili negli integrali tripli. Coordinate sferiche e coordinate cilindriche. Area di una superficie semplice e regolare. Area di una superficie di rotazione. Integrale di superficie.

9. **Campi vettoriali (Capitolo 6, tranne §3).** Campo vettoriale. Linee di campo. Operatori differenziali: gradiente, rotore, divergenza e laplaciano. Campo irrotazionale. Campo solenoidale. Integrale di linea di un campo vettoriale. Lavoro e circuitazione. Campi conservativi e loro proprietà. Potenziale. Formula del lavoro per un campo conservativo con dimostrazione. Conservazione dell'energia meccanica durante il moto sotto l'azione di un campo conservativo con dimostrazione. Legame tra irrotazionalità e conservatività. Dimostrazione che un campo conservativo è irrotazionale. Insiemi semplicemente connessi. Teorema di Green con dimostrazione. Insieme s-decomponibile. Superfici orientabili. Superfici regolari a pezzi. Flusso di un campo vettoriale. Bordo di una superficie orientabile e sua orientazione. Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$ con dimostrazione. Legge di Gauss. Teorema di Stokes.

Pavia, May 25, 2015