1. [3 pt] Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}(x+2)^n$, (a) determinare l'insieme di convergenza; (b) calcolare la somma della serie $f(x)$; (c) calcolare $f^{(10)}(-2)$.

2. [4 pt] Determinare max. e min. di $f = x + y + z$ su $E = \{2x^2 + 3y^2 + z^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

3. [4 pt] Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 \leq 2y \leq 1 + |x|\}$, $\gamma = \partial D$, orientata in senso antiorario.
   (a) Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F}(x, y) = (4y^2(e^x - e^{-x}), 8(e^x + e^{-x})y)$ lungo γ.
   (b) Calcolare la Jacobiana di $\mathbf{F}$

4. [4 pt] Sia $E = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4|x| \leq y \leq 2x + 6$. Calcolare $\iint_E x\,dx\,dy$.

5. [4 pt] Verificare che l'equazione $x^2y^2 + 2z \sin y - 4z^2 + 4 = 0$ è univocamente risolubile rispetto a z in un intorno del punto $P(0, 0, 1)$. Scrivere l'equazione del piano tangente in P alla superficie Σ implicitamente definita dall'equazione.

6. [5 pt] Dati il campo $F(x, y, z) = (-y + z, x + y, 2z + 1)$ e la superficie Σ di equazione cartesiana $z = 3 - 2x^2 - \frac{1}{3}y^2$, $z \geq 0$, determinare: (a) rot F; (b) il versore normale a Σ, diretto verso l'alto (n); (c) il flusso del rotore di F attraverso Σ, orientata con n.

---

7. [4 pt] Vero o Falso: Data la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   (a) f è continua in (0,0); (b) f è continua in (-2,4);
   (c) f è derivabile in (0,0); (d) f è differenziabile in (0,0);

8. [2pt] Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = e^{x+y}$, <u>utilizzando la definizione</u>, calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(1, 1)$ lungo il versore $v = (\sqrt{3}, 1)/2$.

9. [3pt] Enunciare la formula di Green.

Risultati

1. (a) $(-2 - e, -2 + e)$; (b) $f(x) = (1 - \frac{x+2}{e})^{-1}$; (c) $e^{-10}10!$

2. $\pm\frac{11}{6}\sqrt{\frac{6}{11}}$

3. (a) 0; (b) $\begin{bmatrix} 8y^2\cosh(x) & 16y\sinh(x) \\ 16y\sinh(x) & 16\cosh(x) \end{bmatrix}$

4. 8

5. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$; $f(P) = 0$; $\partial_z f(P) = -8 \neq 0$. piano: $z = 1 + y/4$

6. (a) rot $F = (0, 1, 2)$; (b) $n = (4x, \frac{2}{3}y, 1)/\sqrt{1 + 16x^2 + 4y^2/9}$; (c) $6\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\pi$

7. (a,b,c) Vero; (d) Falso

8. $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^{1+t\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{t}{2}} - e^{1+1}}{t} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}e^2$