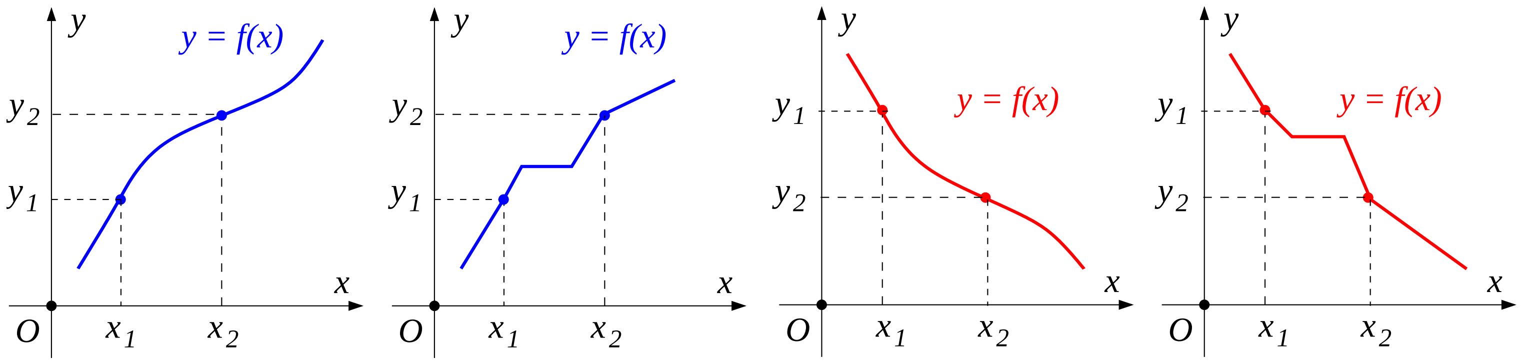
Funzioni Monotone

una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice

- strettamente crescente: $\forall x_1, x_2 \in A\ ,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- crescente: $\forall x_1, x_2 \in A\ ,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- strettamente decrescente: $\forall x_1, x_2 \in A\ ,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- decrescente: $\forall x_1, x_2 \in A\ ,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.



Criterio di Monotonia 1

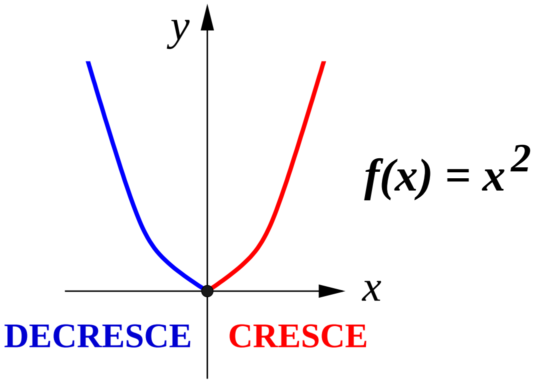
- CRITERIO DI MONOTONIA:
  se $y = f(x)$ è una funzione continua e derivabile in $(a,\ b)$, si ha:
  $$f'(x) \geq 0 \quad \forall\ x \in (a,\ b) \iff f \quad \textit{crescente} \quad \textit{in } (a,\ b)$$
  $$f'(x) \leq 0 \quad \forall\ x \in (a,\ b) \iff f \quad \textit{decrescente in } (a,\ b)$$

- NOTA: per quanto riguarda la *monotonia stretta* si può dimostrare che:
  $$f'(x) > 0 \quad \forall\ x \in (a,\ b) \Rightarrow f \quad \textit{strettamente crescente} \quad \textit{in } (a,\ b)$$
  $$f'(x) < 0 \quad \forall\ x \in (a,\ b) \Rightarrow f \quad \textit{strettamente decrescente in } (a,\ b)$$
  non valgono le implicazioni inverse, basta considerare $f(x) = x^3$, che è strettamente crescente ma $f'(0) = 0$.

- ESEMPI: determinare gli intervalli in cui le seguenti funzioni risultano crescenti e quelli in cui risultano decrescenti.
  1. $f(x) = x^2$. Studiando il segno della derivata: $f'(x) = 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$
     si conclude che: $f(x)$ è decrescente per $x < 0$ ed è crescente per $x > 0$.
  2. $g(x) = (x^2 - 3)e^x$. Si ha: $g'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \textit{ oppure } x \geq 1$
     quindi: $f(x)$ è decrescente per $x \in (-3,\ 1)$ ed è crescente per $x \notin [-3,\ 1]$.

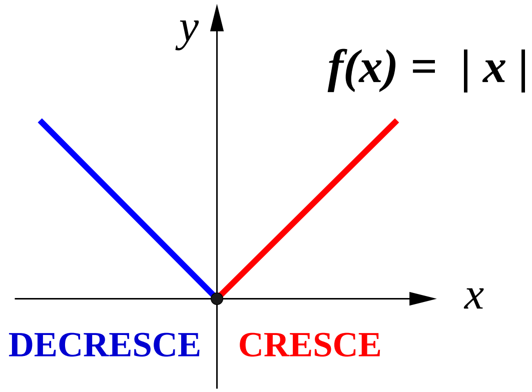
Criterio di Monotonia   2

esempio 1 : $y = x^2$



- $x < 0$ $f'(x) = 2x < 0$
  $\Rightarrow f(x)$ *decrescente*
- $x > 0$ $f'(x) = 2x > 0$
  $\Rightarrow f(x)$ *crescente*
- $x = 0$ $f'(0) = 0$
  punto di minimo relativo

esempio 2 : $y = |x|$



- $x < 0$ $f'(x) = -1 < 0$
  $\Rightarrow f(x)$ *decrescente*
- $x > 0$ $f'(x) = +1 > 0$
  $\Rightarrow f(x)$ *crescente*
- $x = 0$ $\nexists f'(0)$
  punto di minimo relativo

Punti di Massimo e Minimo Relativi

CRITERIO DI MASSIMO E MINIMO: sia $y = f(x)$ è una funzione continua e derivabile in (a, b) , si ha:

- $\bar{x}$ minimo relativo $\Rightarrow$ $f'(\bar{x}) = 0$
- $\bar{x}$ massimo relativo $\Rightarrow$ $f'(\bar{x}) = 0$

Cosa si può dire quando $f'(\bar{x}) = 0$? con questa unica informazione nulla, ma:

- Se $f'(\bar{x}) = 0$, $f'(x) > 0$ per $x > \bar{x}$ e $f'(x) < 0$ per $x < \bar{x}$ allora $\bar{x}$ è un *punto di minimo relativo*.
- Se $f'(\bar{x}) = 0$, $f'(x) < 0$ per $x > \bar{x}$ e $f'(x) > 0$ per $x < \bar{x}$ allora $\bar{x}$ è un *punto di massimo relativo*.

Massimi e Minimi Relativi - Esempi

$f(x) = x^2$ Si studia il segno della derivata: $f'(x) = 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Si conclude che: $f(x)$ è decrescente per $x < 0$ ed è crescente per $x > 0$. Quindi 0 è un punto di minimo relativo.

$f(x) = -x^2$ Si studia il segno della derivata: $f'(x) = -2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$. Si conclude che: $f(x)$ è decrescente per $x > 0$ ed è crescente per $x < 0$. Quindi 0 è un punto di massimo relativo.

$f(x) = x^3$ Si studia il segno della derivata: $f'(x) = 3x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Si conclude che: $f(x)$ è crescente.

Funzioni su un Intervallo Chiuso e Limitato

- Vedere se la funzione è continua e trovare gli eventuali punti di discontinuità.
- Vedere se la funzione è derivabile e trovare gli eventuali punti in cui non è derivabile.
- Se la funzione è continua essa ha certamente massimi e minimi assoluti (vedi teorema di Weierstrass).
- I candidati punti di massimo assoluti di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ sono i seguenti.
  - estremi dell'intervallo: a, b
  - valori $x \in (a, b)$ in cui la funzione non è derivabile.
    Indichiamo con $A = \{ x \ : \nexists\, f'(z)\}$
  - valori $\bar{x} \in (a, b)$ in cui la funzione è derivabile e $f'(\bar{x}) = 0$.
    Indichiamo con $B = \{ \bar{x} \ : f'(\bar{x}) = 0\}$

Funzioni su un Intervallo Chiuso e Limitato

- Il valore massimo assoluto è il massimo di questo insieme:
  $\{f(a), f(b), f(z), f(\bar{x}) \quad | \, z \in A,\ \bar{x} \in B\}$.
- I punti di massimo assoluti sono i valori di x tali che $f(x)$ assume il valore massimo.
- Il valore massimo assoluto è unico.
- I punti di massimo assoluti non sono necessariamente unici.

Esercizi Massimi e Minimi

ESERCIZIO 1 - Trovare punto di massimo e valore massimo, punto di minimo e valore minimo della funzione $y = 3x - 2$ per $x \in [1, 2]$.

SOLUZIONE - La funzione ha come grafico una retta con coefficiente angolare positivo, dunque è strettamente crescente. Il punto di massimo è $x = 2$ e il valore massimo $y = 4$. Il punto di minimo è $x = 1$ e il valore minimo $y = 1$.

ESERCIZIO 2 - Trovare punto di massimo e valore massimo, punto di minimo e valore minimo della funzione $y = x^2$ per $x \in [0, 5]$.

SOLUZIONE - La funzione è strettamente crescente in $[0, 5]$, quindi:

- il punto di massimo è $x = 5$ e il valore massimo $y = 25$.

- il punto di minimo è $x = 0$ e il valore minimo $y = 0$.

Esercizi Massimi e Minimi

ESERCIZIO 3 - Trovare punto di massimo e valore massimo, punto di minimo e valore minimo della funzione $y = -x^3$ per $x \in [2, 5]$.

SOLUZIONE - La funzione è strettamente decrescente in $[2, 5]$, Il punto di massimo è $x = 2$ e il valore massimo $y = -8$. Il punto di minimo è $x = 5$ e il valore minimo $y = -125$.

ESERCIZIO 4 - Dire se la funzione $y = x^2 + 1$ ha massimo su $\mathbb{R}$. Dire se la stessa funzione ha minimo su $\mathbb{R}$.

SOLUZIONE - La funzione non ha massimo, il minimo è $x = 0$ e il suo valore è $y = 1$.

ESERCIZIO 5 - Trovare una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ con più di un punto di massimo.

SOLUZIONE - $y = 1$ ha infiniti punti di massimo.

Esercizi Massimi e Minimi

ESERCIZIO 6 - Trovare i punti di massimo e minimo ed i rispettivi valori della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{per } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

SOLUZIONE - La funzione ha un unico punto di minimo per $x = 0$ con valore minimo $y = 0$ e ha infiniti punti unico di massimo per $1 \leq x \leq 2$ con valore massimo $y = 1$.

ESERCIZIO 6 - Trovare i punti di massimo e minimo ed i rispettivi valori della funzione $f(x) = |x|$ nell'intervallo $[-2, 1]$.

SOLUZIONE - La funzione ha un unico punto di minimo per $x = 0$ con valore minimo $y = 0$ e un punto unico punto di massimo per $x = -2$ con valore massimo $y = 2$.