

# Trapianti e scambi di donatori dal punto di vista della teoria dei giochi - I

Silvia Villa

Dipartimento di Matematica  
Università di Genova  
`villa@dima.unige.it`

Almo Collegio Borromeo  
Pavia, 23 Aprile 2008

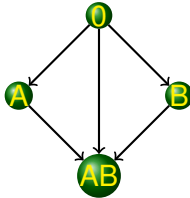
# Trapianti di rene

- E' attualmente una terapia di routine, la migliore disponibile, per molti tipi di malattie
- La domanda è molto superiore all'offerta, quindi esiste una lunga lista d'attesa
- Il trapianto da vivente è possibile

# Vincolo istituzionale

- non si possono vendere e comperare organi (in quasi nessuno stato)
- c'è una ricca letteratura sulla possibilità di rendere legale la vendita di organi (Becker- Elias 2002)
- in Olanda: proposta di offrire un'assicurazione sulla salute gratuita per tutta la vita a chi dona un rene (The Sunday Times, 18/11/2007)

# Vincoli di tipo medico: compatibilità di gruppo sanguigno



# Vincoli di tipo medico: compatibilità tissutale (o HLA)

- ciascun individuo è di un tipo HLA
- il tipo HLA è determinato da una combinazione di 6 proteine
- il crossmatch positivo rende impossibile il trapianto

# Un esempio sulla compatibilità HLA

Gruppo HLA del donatore:

2	30	13	49	4	7
---	----	----	----	---	---

Gruppo HLA del ricevente:

1	2	70	8	4	7
---	---	----	---	---	---

- ci sono 3 mismatch tra donatore e ricevente
- il numero di mismatch è una misura del livello di compatibilità

# Il sistema trapianti in Italia

Quando un rene (da cadavere) si rende disponibile la priorità di ciascun paziente viene determinata in base a:

- compatibilità di gruppo sanguigno e HLA
- differenza di età e di peso
- tempo trascorso in lista d'attesa
- centro di provenienza del rene

# Come funziona il trapianto da vivente

- Il paziente deve trovare un donatore disponibile (un parente, un coniuge o una persona a lui stabilmente legata)
- Se il trapianto è possibile viene eseguito (dopo accertamenti medici, psicologici e legali)
- Se il trapianto non è possibile il paziente viene reinserito nella lista d'attesa



# Scambi di donatori

## Scambio tra due coppie incompatibili

Donatore 1

Ricevente 1

Donatore 1 e Ricevente 1 sono incompatibili

# Scambi di donatori

## Scambio tra due coppie incompatibili

Donatore 1

Ricevente 1

Donatore 2

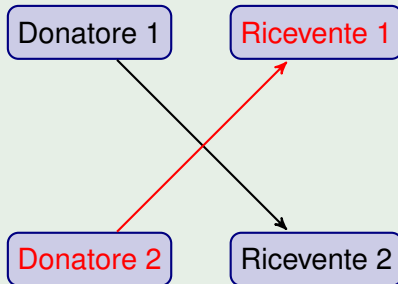
Ricevente 2

Donatore 1 e Ricevente 1 sono incompatibili

Donatore 2 e Ricevente 2 sono incompatibili

# Scambi di donatori

## Scambio tra due coppie incompatibili



Ricevente 1 e Ricevente 2 sono **reciprocamente compatibili**

# Scambio di donatori indiretto

Tre coppie incompatibili

Donatore 1

Ricevente 1

Donatore 3

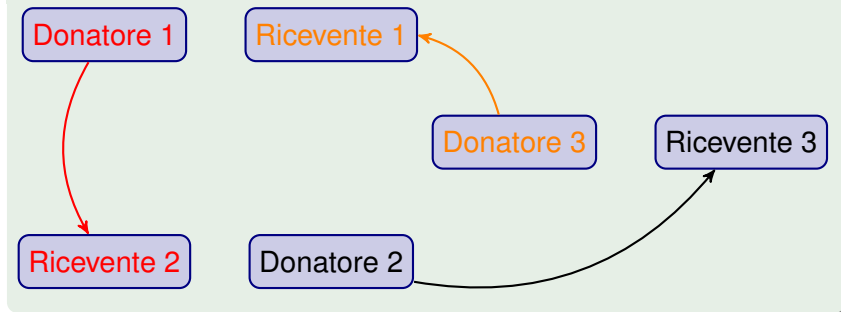
Ricevente 3

Ricevente 2

Donatore 2

# Scambio di donatori indiretto

Tre coppie incompatibili



# Scambi con la lista

Una coppia con la lista

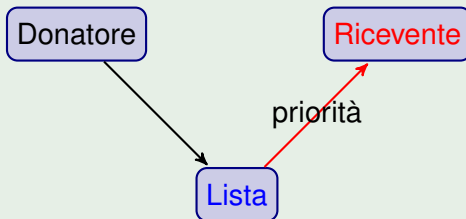
Donatore

Ricevente

Lista

# Scambi con la lista

## Una coppia con la lista



# Scambi più elaborati

## Una combinazione ammissibile

Donatore 1

Ricevente 1

Lista

Ricevente 2

Donatore 2



# Scambi più elaborati

## Una combinazione ammissibile



# Osservazioni sugli scambi

- sono eticamente accettati (vengono considerati come scambi di doni)
- sono ancora poco diffusi, ma programmi di scambio sono nati in molte nazioni
- tutte le operazioni devono essere fatte contemporaneamente

# Ipotesi e modelli

Tre ipotesi sono fondamentali per la costruzione del modello:

- preferenze dei pazienti sui reni compatibili
  - basate sulla compatibilità
  - 0-1: ogni paziente è indifferente tra tutti i reni compatibili
- numero di trapianti contemporanei ammessi
- scambi con la lista

# Modello 1 (Roth-Sönmez-Ünver, KE 2004)

- le preferenze dei pazienti dipendono dal livello di compatibilità
- non ci sono vincoli sulla lunghezza dei cicli ammissibili
- sono ammessi gli scambi con la lista

## Modello 2 (Cechlárová-Fleiner-Manlove, The KE game 2005)

- le preferenze dei pazienti dipendono dal livello di compatibilità e dalla lunghezza del ciclo in cui sono inseriti
- non sono ammessi gli scambi con la lista

# Modello 3 (Roth-Sönmez-Ünver, Pairwise KE 2005)

- le preferenze dei pazienti sono del tipo 0-1
- sono ammessi soltanto scambi diretti
- non sono ammessi gli scambi con la lista

# Modello 4 (Villa-Patrone 2008)

- le preferenze dei pazienti dipendono dal livello di compatibilità
- sono ammessi soltanto scambi diretti
- non sono ammessi gli scambi con la lista

# Algoritmi

- per ognuno dei modelli precedenti, a parte il modello 2, esistono degli algoritmi che trovano le "soluzioni del problema"
- interessante è confrontare gli algoritmi ottenuti con un approccio teorico con quelli utilizzati in pratica
- faremo il confronto con l'algoritmo correntemente in uso in Olanda



# Mercati con beni indivisibili

- Gale - Shapley 1962
- Shapley-Scarf 1974
- Roth 1982
- Abdulkadiroglu- Sönmez 1999

# Descrizione del modello

- abbiamo un insieme  $N$  di  $n$  individui (pazienti)
- ogni individuo possiede un bene indivisibile (una casa, un donatore, o un insieme di donatori)
- ogni individuo vuole soltanto un bene, ed ha preferenze strette sui beni disponibili
- il risultato che cerchiamo è una redistribuzione degli beni, che sia in accordo con le preferenze degli individui

# Formalizzazione - esempio

Supponiamo di avere 3 individui e sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

# Formalizzazione - esempio

Supponiamo di avere 3 individui e sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo costruire un gioco cooperativo a utilità non trasferibile:

$$\begin{array}{lll} V(1) : (0, -, -) & V(2) : (-, 0, -) & V(3) : (-, -, 0) \\ V(1, 2) : (1, 2, -) & V(1, 3) : (2, -, 1) & V(2, 3) : (-, 1, 2) \end{array}$$

$$V(1, 2, 3) \supset (1, 2, 0), (2, 0, 1), (0, 1, 2), (2, 2, 2), (1, 1, 1).$$

# C'è una soluzione stabile

## Teorema di Shapley e Scarf

Il nucleo del gioco  $(N, V)$  è non vuoto.

Provare che il nucleo è non vuoto assicura che esistono allocazioni che non sono bloccate da nessuna coalizione più piccola e quindi sono stabili

# Algoritmo Top Trading Cycle (Gale)

Fornisce un metodo costruttivo per trovare una soluzione, cioè un elemento del nucleo.

- 1 si ordinano i pazienti in qualche modo
- 2 il primo paziente punta verso il suo donatore preferito (tra quelli disponibili)
- 3 ciascun donatore punta verso il suo paziente
- 4 appena si forma un ciclo si eliminano i pazienti e i donatori coinvolti
- 5 se ci sono ancora dei pazienti “sul mercato” si torna al punto 2

# Algoritmo Top Trading Cycle (Gale)

Fornisce un metodo costruttivo per trovare una soluzione, cioè un elemento del nucleo.

- 1 si ordinano i pazienti in qualche modo
- 2 il primo paziente punta verso il suo donatore preferito (tra quelli disponibili)
- 3 ciascun donatore punta verso il suo paziente
- 4 appena si forma un ciclo si eliminano i pazienti e i donatori coinvolti
- 5 se ci sono ancora dei pazienti “sul mercato” si torna al punto 2

# Algoritmo Top Trading Cycle (Gale)

Fornisce un metodo costruttivo per trovare una soluzione, cioè un elemento del nucleo.

- 1 si ordinano i pazienti in qualche modo
- 2 il primo paziente punta verso il suo donatore preferito (tra quelli disponibili)
- 3 ciascun donatore punta verso il suo paziente
- 4 appena si forma un ciclo si eliminano i pazienti e i donatori coinvolti
- 5 se ci sono ancora dei pazienti “sul mercato” si torna al punto 2



# Algoritmo Top Trading Cycle (Gale)

Fornisce un metodo costruttivo per trovare una soluzione, cioè un elemento del nucleo.

- 1 si ordinano i pazienti in qualche modo
- 2 il primo paziente punta verso il suo donatore preferito (tra quelli disponibili)
- 3 ciascun donatore punta verso il suo paziente
- 4 appena si forma un ciclo si eliminano i pazienti e i donatori coinvolti
- 5 se ci sono ancora dei pazienti “sul mercato” si torna al punto 2

# Algoritmo Top Trading Cycle (Gale)

Fornisce un metodo costruttivo per trovare una soluzione, cioè un elemento del nucleo.

- 1 si ordinano i pazienti in qualche modo
- 2 il primo paziente punta verso il suo donatore preferito (tra quelli disponibili)
- 3 ciascun donatore punta verso il suo paziente
- 4 appena si forma un ciclo si eliminano i pazienti e i donatori coinvolti
- 5 se ci sono ancora dei pazienti “sul mercato” si torna al punto 2

# Algoritmo Top Trading Cycle (Gale)

Fornisce un metodo costruttivo per trovare una soluzione, cioè un elemento del nucleo.

- 1 si ordinano i pazienti in qualche modo
- 2 il primo paziente punta verso il suo donatore preferito (tra quelli disponibili)
- 3 ciascun donatore punta verso il suo paziente
- 4 appena si forma un ciclo si eliminano i pazienti e i donatori coinvolti
- 5 se ci sono ancora dei pazienti “sul mercato” si torna al punto 2

# Esempio

Consideriamo un problema di KE con 12 coppie con le seguenti preferenze:

$r_1:$	$d_9$	$d_{10}$									
$r_2:$	$d_{11}$	$d_3$	$d_5$	$d_6$							
$r_3:$	$d_2$	$d_4$	$d_5$	$d_6$	$d_7$	$d_8$					
$r_4:$	$d_5$	$d_9$	$d_1$	$d_8$	$d_{10}$	$d_3$					
$r_5:$	$d_3$	$d_7$	$d_{11}$	$d_4$							
$r_6:$	$d_3$	$d_5$	$d_8$								
$r_7:$	$d_6$	$d_1$	$d_3$	$d_9$	$d_{10}$	$d_1$					
$r_8:$	$d_6$	$d_4$	$d_{11}$	$d_2$	$d_3$						
$r_9:$	$d_3$	$d_{11}$									
$r_{10}:$	$d_{11}$	$d_1$	$d_4$	$d_5$	$d_6$	$d_7$					
$r_{11}:$	$d_3$	$d_6$	$d_5$								
$r_{12}:$	$d_{11}$	$d_3$	$d_9$	$d_8$	$d_{10}$						

# Risultato e commenti

- il risultato è  $(3, 2, 11), (9), (1, 10), (5, 7, 6), (4, 8), (12)$
- non tutti i pazienti ricevono un trapianto, ma l'allocazione è **efficiente**
- i pazienti  $r_2, r_3, r_{11}$  ricevono il loro rene preferito
- si potrebbe pensare di ordinare i pazienti in modo furbo

## Ancora commenti (di Roth e Postlewaite)

- nel caso le preferenze siano strette il risultato del TTC è unico (non conta l'ordine), perché il nucleo del gioco contiene solo un'allocatione
- se le preferenze dei giocatori sono segrete, e il meccanismo adottato per la scelta della soluzione è il TTC, rivelare le reali preferenze è una strategia dominante per i giocatori
- la funzione di scelta sociale determinata dal TTC soddisfa la proprietà di incentive compatibility

# Scambi con la lista - problemi collegati

Il problema degli scambi con la lista è molto simile a quello dell'assegnazione delle stanze di un collegio a degli studenti, con le seguenti ipotesi:

- le stanze vengono assegnate da un ufficio
- alcune stanze sono già occupate dagli studenti più grandi, che possono decidere di tenere la stanza che hanno oppure possono fare richiesta per cambiare stanza
- costruiamo un meccanismo simile al TTC, che si chiamato dagli autori: “You Request My House - I Get Your Turn”

# Il meccanismo YRMH - IGYT

- tutti gli studenti dichiarano le loro preferenze rispetto alle stanze
- si sceglie (casualmente?) un ordinamento degli studenti
- al primo studente si assegna la sua prima scelta, al secondo la sua prima scelta tra le stanze rimanenti e così via fino a che qualcuno non richiede una stanza già occupata da uno studente più grande che ancora non è stato interpellato
- quando questo accade, si modifica l'ordinamento della lista spostando al primo posto lo studente grande e si va avanti
- se si forma un ciclo, questo è fatto solo da studenti grandi: in questo caso si fanno gli scambi previsti dal ciclo e si eliminano gli studenti nel ciclo dalla procedura



# Commenti

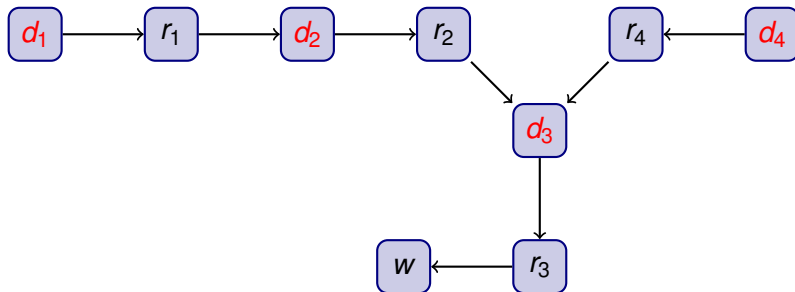
- Il meccanismo YRMY - IGYT assicura che gli studenti grandi ottengano una stanza non peggiore di quella che hanno già
- gli studenti sono quindi incentivati a partecipare alla procedura

# Stanze e reni: differenze e analogie

- gli studenti grandi sono le coppie paziente-donatore; gli studenti nuovi (quelli senza stanza) sono i pazienti in lista
- nel caso dei reni: quando il donatore  $d_1$  dona il suo rene al paziente più in alto nella lista d'attesa, il paziente  $r_1$  viene inserito al primo posto nella lista d'attesa
- la principale differenza è che il paziente che ottiene il primo posto in lista d'attesa non sa quando arriverà un rene compatibile, né quanto sarà “buono”, mentre uno studente grande sa che stanza avrà in cambio della sua
- a seconda delle preferenze della coppia, l'opzione lista può essere considerata possibile oppure no.

# Esempio 1 - Top Trading Cycles and Chains

Supponiamo di essere nella seguente situazione, sapendo che le preferenze del paziente  $r_4$  sono  $d_3, d_1$ :



# Commenti Esempio 1 TTCC

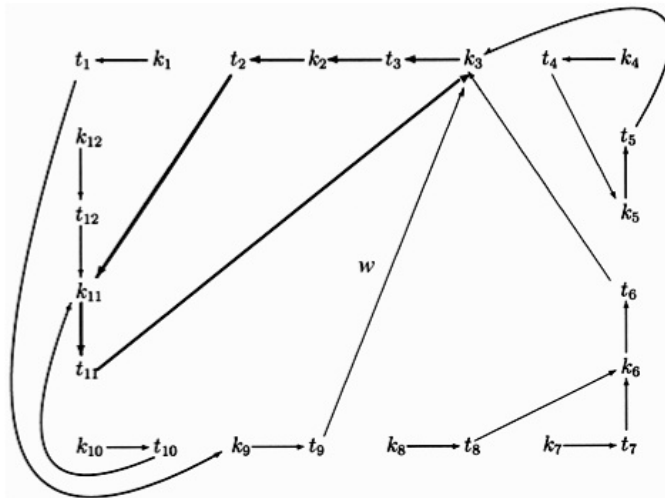
- si ottengono cicli e catene; i cicli sono disgiunti, le catene si possono intersecare
- serve una regola di selezione delle catene. Possibilità
  - scegliere la catena più lunga e toglierla (oppure lasciarla), e se ci sono più catene della stessa lunghezza, scegliere quella che contiene il paziente con più alta priorità
  - scegliere la catena più corta e toglierla
  - scegliere le catene che contengono pazienti di tipo 0

# Esempio 2- Top Trading Cycles and Chains (R-S-U 2004)

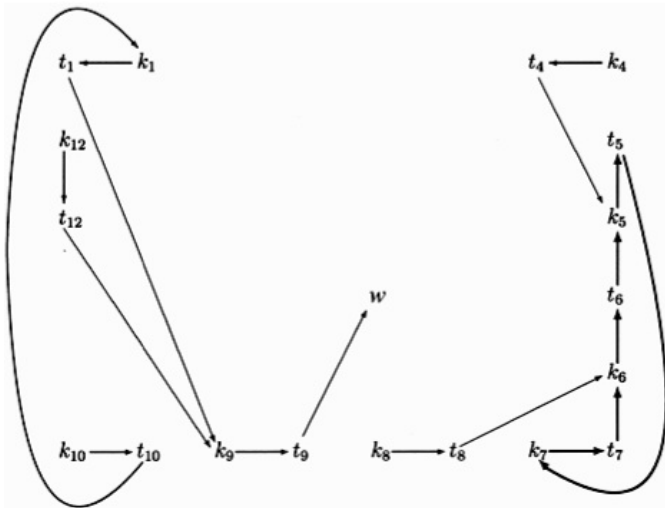
Consideriamo un problema di KE con 12 coppie con le seguenti preferenze:

$t_1$ :	$k_9$	$k_{10}$	$k_1$						$t_7$ :	$k_6$	$k_1$	$k_3$	$k_9$	$k_{10}$	$k_7$	$w$
$t_2$ :	$k_{11}$	$k_3$	$k_5$	$k_6$	$k_2$				$t_8$ :	$k_6$	$k_4$	$k_{11}$	$k_2$	$k_3$	$k_8$	
$t_3$ :	$k_2$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$	$w$		$t_9$ :	$k_3$	$k_{11}$	$w$				
$t_4$ :	$k_5$	$k_9$	$k_1$	$k_8$	$k_{10}$	$k_3$	$w$		$t_{10}$ :	$k_{11}$	$k_1$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$w$
$t_5$ :	$k_3$	$k_7$	$k_{11}$	$k_4$	$k_5$				$t_{11}$ :	$k_3$	$k_6$	$k_5$	$k_{11}$			
$t_6$ :	$k_3$	$k_5$	$k_8$						$t_{12}$ :	$k_{11}$	$k_3$	$k_9$	$k_8$	$k_{10}$		

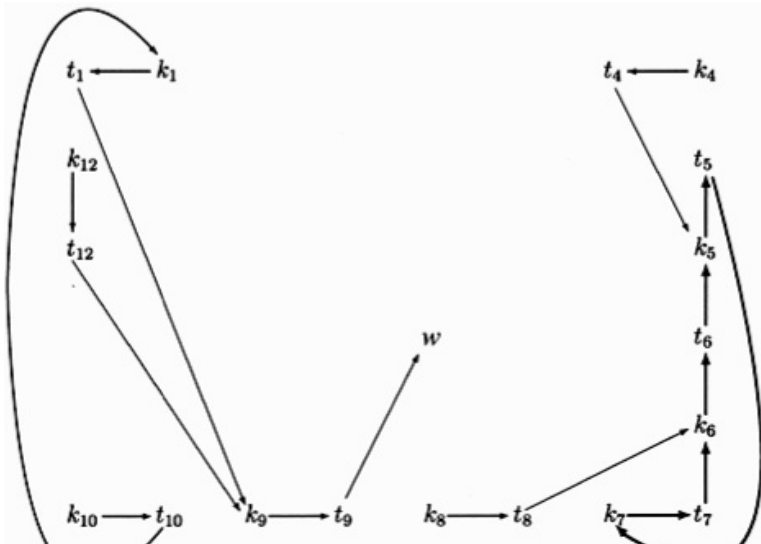
# Primo round TTCC: rimozione dei cicli



## Secondo round TTCC: rimozione dei cicli

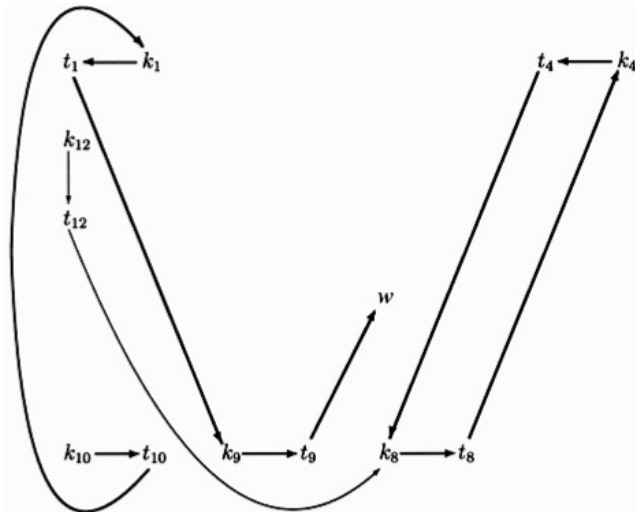


## Terzo round TTCC: selezione della catena

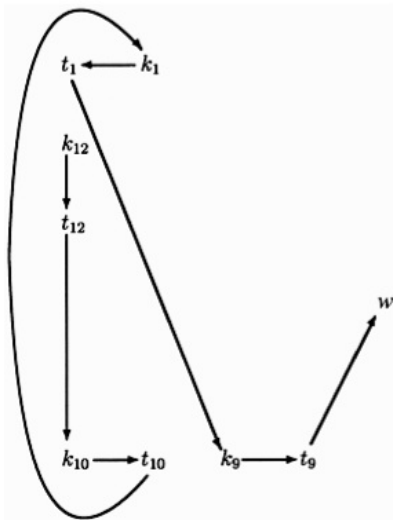




## Quarto round TTCC: ancora cicli da rimuovere



# L'ultima catena



# Incentive compatibility ed efficienza del TTCC

- Il meccanismo TTCC soddisfa la proprietà di incentive compatibility solo per alcune regole di selezione delle catene
- La regola di selezione della catena più lunga non è incentive compatible, quella della catena più corta sì
- Il meccanismo TTCC è efficiente solo se le catene non vengono eliminate appena si formano

# Esempio R-S-U 2004

Supponiamo che il paziente  $r_4$  dichiari delle preferenze false, anziché quelle vere:

$r_4$ :	$d_5$	$d_9$	$d_1$	$d_8$	$d_{10}$	$d_3$	/	VERE
$r_4$ :	$d_5$	$d_1$	$d_9$	$d_8$	$d_{10}$	$d_3$	/	FALSE

Al terzo round, viene selezionata la catena (8, 4, 1, 9).  $r_4$  riceve il rene  $d_4$  che preferisce al rene  $d_8$  che avrebbe altrimenti ricevuto.

# Modello 1: considerazioni conclusive

- possono formarsi cicli anche molto lunghi
- ci sono problemi logistici e di non affidabilità dei cicli
- ammettere cicli lunghi aumenta l'efficienza, ci sono lavori su questo (R-S-U)
- sono state fatte simulazioni per valutare l'impatto di questa pratica sul sistema trapianti (anche al variare della lunghezza dei cicli ammessi)
- è un modello statico

## Modello 2 (Cechlárová-Fleiner-Manlove, The KE game 2005)

- le preferenze dei pazienti dipendono dal livello di compatibilità e dalla lunghezza del ciclo in cui sono inseriti
- non sono ammessi gli scambi con la lista

# Preferenze dei pazienti

Ogni allocazione assegna un donatore e un ciclo ad ogni paziente.

## Definizione delle preferenze

Il paziente  $i$  preferisce la coppia  $(d_j, M)$  alla coppia  $(d_k, N)$  se

- preferisce  $d_j$  a  $d_k$  oppure
- è indifferente tra  $d_j$  e  $d_k$ , e il ciclo  $M$  è più corto del ciclo  $N$

# Osservazioni

- è possibile costruire un gioco cooperativo simile a quello di prima che rappresenta la situazione
- non è chiaro quando il nucleo di questo gioco sia non vuoto
- esiste un algoritmo, nel caso di preferenze 0-1 sui reni (CoreSimpleGame)



# Bibliografia

Gli articoli di Roth-Sönmez-Ünver sono reperibili all'indirizzo:

<http://kuznets.fas.harvard.edu/ aroth/alroth.html>