Traccia della soluzione. Prova in itinere — 12 novembre 2002

1.

a) Evidentemente la successione tende a zero per $x > 0$ per ogni valore di α e vale identicamente zero per $x = 0$.

b) Si verifica facilmente che la funzione $|f_n| = f_n$ nella semiretta $[0, +\infty[$ ha un unico massimo in $x = 1/n$ ed è decrescente per $x > 1/n$. Nell'intervallo $[1, +\infty[$ ha quindi massimo nel punto $x = 1$ dove vale

$$f_n(1) = n^\alpha e^{-n} \to 0$$

Per quanto osservato nel punto b), nell'intervallo $[0, 1]$ è sufficiente studiare il comportamento della successione $f_n(1/n)$ che tende a zero se e solo se $\alpha < 1$.

2. Per il criterio di Weierstraß, è sufficiente determinare un intervallo $[a, b]$ in cui posso maggiorare $|x \log x|$ con una costante $C < 1$. Questo accade, per esempio, in $[1/e, 1]$ dove la funzione è sempre non positiva e ha minimo $-1/e$.

3. Si ha:

$$g(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}$$

Da cui si ottiene, derivando per serie,

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) x^{2n}}{n!}$$

4. Si ottiene facilmente, utilizzando il criterio del rapporto, che $\rho = 1$. Per $x = 1$ si ottiene una serie a termini positivi divergente (confronto con la serie armonica) e per $x = -1$ la serie converge per il criterio di Leibniz.